

本日よりこと

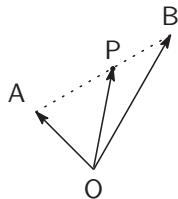
① 行列式

- ベクトルの 1 次独立性
- 行列式の図形的意味

行列式

ベクトルの 1 次独立性

[直線上の点]



点 P が直線 AB 上にある

\iff

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, $t + s = 1$ となる実数 t, s がある。

だから $A \neq B$ のとき

(i) 直線 AB 上が原点 O をふくむ

\iff

(ii) $\vec{0} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, $t + s = 1$ となる実数 t, s がある。

\iff

(iii) $\vec{0} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ となる実数 t, s がある。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)

2 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ が

1 次独立であるとは O, A, B が同一直線上にないこと。

1 次従属であるとは O, A, B が同一直線上にあること。

と定める。

前の述べたことから

2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)

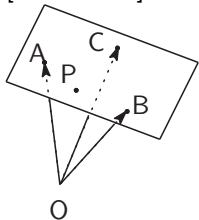
\vec{a}, \vec{b} が 1 次独立 \iff 「 $\vec{0} = t\vec{a} + s\vec{b} \Rightarrow t = s = 0$ 」

といっても同じことである。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

[平面上の点]



点 P が A B C を含む平面上にある

\iff

$\vec{OP} = t\vec{OA} + s\vec{OB} + r\vec{OC}$, $t + s + r = 1$ となる実数 t, s, r がある。

だから A, B, C がすべて異なるとき

A B C を含む平面が原点 O をふくむ

\iff

$\vec{0} = t\vec{OA} + s\vec{OB} + r\vec{OC}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ または $r \neq 0$ となる実数 t, s, r がある。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)

3 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ が

独立であるとは O, A, B, C が同一平面上に**ない**こと。

1 次従属であるとは O, A, B, C が同一平面上に**ある**こと。

と定める。

前述のことにより

3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次独立 \iff 「 $\vec{0} = t\vec{a} + s\vec{b} + r\vec{c} \Rightarrow t = s = r = 0$ 」

といっても同じことである

行列式

ベクトルの 1 次独立性

n 個のベクトルの 1 次独立性の定義

n 個のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ が **1 次独立である**とは

「 $\vec{0} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_n \vec{a}_n \Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ 」であること。

1 次従属であるとは 一次独立でないこと。

と定める。

$n = 2, 3$ のときは前述したものと一致する。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{の列ベクトルを } \vec{\mathbf{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

とする。このとき

1 次独立性の条件

$$\{\vec{\mathbf{a}}_1, \dots, \vec{\mathbf{a}}_n\} \text{ が 1 次独立} \iff \mathbf{A} \text{ が正則}$$

行ベクトルについても同様である。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

[確かめ] 第 6 回に述べたように

A が正則 \iff

$$A \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \cdots + t_n \vec{a}_n = \vec{0} \text{ が } t_1 = \cdots = t_n = 0 \text{ 以外の解を持$$

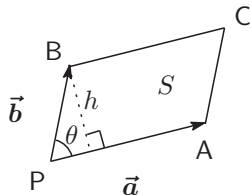
たない

だから明らか。

行列式

行列式の図形的意味

平行四辺形の面積



PACB は \vec{a} , \vec{b} で張られる平行四辺形で面積は S ,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

行列式

行列式の図形的意味

[確かめ] \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ , 高さを h とする.

$$S^2 = |\vec{a}|^2 h^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta$$

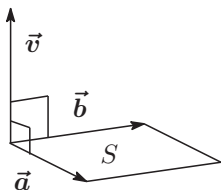
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ だから

$$\begin{aligned} &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \end{aligned}$$

行列式

行列式の図形的意味

空間のベクトルの外積の定義



\vec{a}, \vec{b} : 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{v}, \vec{b} \perp \vec{v}$

(ii) $|\vec{v}| = \vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 (= S とおく)

(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}\}$ は右手系

を満たすベクトル \vec{v} がただ一つある。この \vec{v} を \vec{a}, \vec{b} の外積といい

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

\vec{a}, \vec{b} が 1 次従属ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。

行列式

行列式の図形的意味

外積の成分表示

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

行列式

行列式の図形的意味

[(i) の確かめ]

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{v} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

$\vec{b} \bullet \vec{v} = 0$ も同様。

行列式

行列式の図形的意味

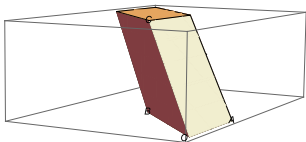
[(ii) の確かめ]

$$\begin{aligned} S^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

行列式

行列式の図形的意味

平行 6 面体の体積



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

で張られる平行 6 面体の体積 V は

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

行列式

行列式の図形的意味

[確かめ]

