本日やること

1. 行列式
   - 連立 1 次方程式と行列式

行列式

復習：行列式の定義

[復習：行列式の定義]

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ の列ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ j=1,2,\cdots,n$

とするとき $\vec{\boldsymbol{a}}_j$ を $j=1,2,\cdots,n$ について組み合わせ乗積し, 展開・整理して

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1\circ\vec{\boldsymbol{a}}_2\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{a}}_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\vec{\boldsymbol{e}}_1\circ\vec{\boldsymbol{e}}_2\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \cdots(\star)$$

となるように $\boldsymbol{A}$ の行列式を決めたのであった。

$\boldsymbol{A}$ の行列式を $|\boldsymbol{A}|$, $|\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2,\cdots,\vec{\boldsymbol{a}}_n|$ とも表す.

行列式

連立 1 次方程式と行列式

[復習：連立 1 次方程式の解法]

$$
(P) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}
$$

を組み合わせ乗積を用いて解きたい。

行列式

連立 1 次方程式と行列式

$$(P) \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{右辺を } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ とおく})$$

$$\iff x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}} \cdots (\star\star)$$

$(\star\star)$ に左から $\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j-1}$, 右から $\vec{\boldsymbol{a}}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n$ を乗積すると

$$\begin{aligned} x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j-1} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n + \cdots \\ + x_j\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j-1} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_j \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n + \cdots \\ + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j-1} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n \\ = \vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j-1} \circ \vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{aligned}$$

行列式

連立 1 次方程式と行列式

同じ項を含む乗積は $\vec{0}$ だから, 左辺は第 j 項のみが残って

$$x_j\vec{\boldsymbol{a}}_1\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{a}}_{j-1}\circ\vec{\boldsymbol{a}}_j\circ\vec{\boldsymbol{a}}_{j+1}\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{a}}_n=\vec{\boldsymbol{a}}_1\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{a}}_{j-1}\circ\vec{\boldsymbol{b}}\circ\vec{\boldsymbol{a}}_{j+1}\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{a}}_n$$

行列式の定義 $(\star)$ により

$$x_j|A|=|\vec{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\vec{\boldsymbol{b}},\cdots,\vec{\boldsymbol{a}}_n|,\quad j=1,2,\cdots,n\quad\cdots(\star\star\star)$$

行列式

連立 1 次方程式と行列式

まとめると

クラメルの公式

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ のとき, 連立 1 次方程式 (P) の解は

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|\boldsymbol{A}|}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

である. ただし Δ_j は

$$\Delta_j = |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n| \quad : |\boldsymbol{A}| \text{ の第 } j \text{ 列を } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ で置きかえたもの}$$

これをクラメルの公式という。連立方程式の解の公式である。

行列式

連立 1 次方程式と行列式

$A\vec{x} = \vec{0}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を持つ条件

A を n 次正方行列とするとき, 次のことは同値である。

(i) $\vec{x}$ の連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を持つ

(ii) $|A| = 0$

[確かめ]
(i) を仮定する。$\vec{0}$ でない $A\vec{x} = \vec{0}$ の解 $\vec{x}$ があるので, 例えば $x_j \neq 0$ とする。
$(\star\star\star)$ で $\vec{b} = \vec{0}$ とおくと右辺は 0 となるので $|A| = 0$。すなわち (i)⇒(ii).
(ii) を仮定する。線形代数 A 第 6 回にやったことにより
「$n = \mathrm{rank}(A)$ $\Leftrightarrow$ 連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ は常にただ一つの解を持つ。」
行基本変形により A は階段行列 B に変形されるものとすると $|A| = c|B|$ $(c \neq 0)$ である。$|A| = 0$ だから $|B| = 0$。したがって B の第 n 行はすべて 0 である。これは $n > \mathrm{rank}(A)$ を意味するので連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は不定。したがって (i) が成り立つ。