

本日よりこと

① 行列式

- 連立 1 次方程式と行列式

行列式

復習：行列式の定義

[復習：行列式の定義]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ の列ベクトルを } \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

とするとき \vec{a}_j を $j = 1, 2, \dots, n$ について組み合わせ乗積し、展開・整理して

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \circ \cdots \circ \vec{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n \quad \cdots (*)$$

となるように A の行列式を決めたのであった。

A の行列式を $|A|$, $|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n|$ と表す。

行列式

連立 1 次方程式と行列式

$$(P) \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{右辺を } \vec{b} \text{ とおく})$$

$$\iff x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b} \cdots (\star\star)$$

($\star\star$) に左から $\vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1}$, 右から $\vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n$ を乗積すると

$$\begin{aligned} & x_1 \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{a}_1 \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n + \cdots \\ & + x_j \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{a}_j \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n + \cdots \\ & + x_n \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{a}_n \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n \\ & = \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{b} \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n \end{aligned}$$

行列式

連立 1 次方程式と行列式

同じ項を含む乗積は $\vec{0}$ だから, 左辺は第 j 項のみが残って

$$x_j \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{a}_j \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n = \vec{a}_1 \circ \cdots \circ \vec{a}_{j-1} \circ \vec{b} \circ \vec{a}_{j+1} \circ \cdots \circ \vec{a}_n$$

行列式の定義 (★) により

$$x_j |A| = |\vec{a}_1, \cdots, \vec{b}, \cdots, \vec{a}_n|, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad \cdots (\star\star\star)$$

行列式

連立 1 次方程式と行列式

まとめると

クラメルの公式

$|A| \neq 0$ のとき、連立 1 次方程式 (P) の解は

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

である。ただし Δ_j は

$$\Delta_j = |\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n| \quad : |A| \text{ の第 } j \text{ 列を } \vec{b} \text{ で置きかえたもの}$$

これを **クラメルの公式** という。連立方程式の解の公式である。

行列式

連立 1 次方程式と行列式

$A\vec{x} = \vec{0}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を持つ条件

A を n 次正方行列とするとき、次のことは同値である。

- (i) \vec{x} の連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ が $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を持つ
- (ii) $|A| = 0$

[確かめ]

(i) を仮定する。 $\vec{0}$ でない $A\vec{x} = \vec{0}$ の解 \vec{x} があるので、例えば $x_j \neq 0$ とする。

(***) で $\vec{b} = \vec{0}$ とおくと右辺は 0 となるので $|A| = 0$ 。すなわち (i) \Rightarrow (ii)。

(ii) を仮定する。線形代数 A 第 6 回にやったことにより

「 $n = \text{rank}(A) \Leftrightarrow$ 連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ は常にただ一つの解を持つ。」

行基本変形により A は階段行列 B に変形されるものとする。 $|A| = c|B|$ ($c \neq 0$)

である。 $|A| = 0$ だから $|B| = 0$ 。したがって B の第 n 行はすべて 0 である。こ

れは $n > \text{rank}(A)$ を意味するので連立方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ は不定。したがって (i) が成り立つ。