

本日やること

① 行列式

- 余因子・余因子行列
- 行列式と逆行列
- 多項式の因数分解

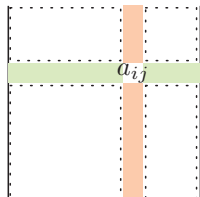
行列式

復習:行列式の展開

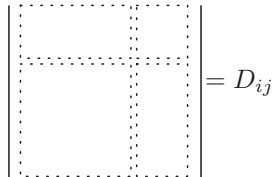
復習：小行列式の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列の行列式

に対して第 i 行 第 j 列の成分を取り除いてできる

取り除く

 $= D_{ij}$ を $|A|$ の (i, j) 成分の小行列式といい D_{ij} で表す。

行列式

行列式の展開

余因子・余因子行列の定義

$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を $|A|$ の (i, j) 余因子とよぶ。

$\tilde{A} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ を A の余因子行列とよぶ。

\tilde{A} の (i, j) 成分を \tilde{A}_{ij} と書くと $\tilde{A}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ となることに注意。

行列式

余因子・余因子行列

[復習：行列式の第 i 行，第 j 列に関する展開]

$$(i) |A| = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}$$

$$(ii) |A| = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}$$

であったがこれを余因子で書き直すと

$$(i) |A| = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik} \cdots (\star)$$

$$(ii) |A| = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj} \tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{kj} \cdots (\star\star)$$

が得られる。さらに

行列式

余因子・余因子行列

余因子の性質

$$(i) \quad a_{i'1}\tilde{a}_{i1} + a_{i'2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{i'n}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^n a_{i'k}\tilde{a}_{ik} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & i = i' \text{ のとき} \\ 0 & i \neq i' \text{ のとき} \end{cases}$$

$$(ii) \quad a_{1j'}\tilde{a}_{1j} + a_{2j'}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj'}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj'}\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & j = j' \text{ のとき} \\ 0 & j \neq j' \text{ のとき} \end{cases}$$

行列式

余因子・余因子行列

[(i) の確かめ]

$$(i) \text{ の左辺} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'j} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

だから $|A|$ の第 i 行を 第 i' 行で置き換えたものである。したがって

$i = i'$ のときは $(*)$ により $|A|$ に一致。

$i \neq i'$ のときは 第 i' 行と 第 i 行 が一致するので行列式の性質により 0.

(ii) も同様。

行列式

余因子・余因子行列

補題：余因子行列の性質

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E \quad (E \text{ は単位行列})$$

[確かめ]

$$A\tilde{A} \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{jk} = \begin{cases} |A| & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

だから $A\tilde{A} = |A|E$.

$\tilde{A}A = |A|E$ も同様。

行列式

行列式と逆行列

定理：余因子行列による逆行列の構成

正方行列 A が正則 $\iff |A| \neq 0$

このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

[確かめ]

\Rightarrow は第 4 回にやった。

\Leftarrow は補題より明らか。

行列式

応用：多項式の因数分解

多項式の因数分解

成分に文字を含む行列式は多項式となるが、行列式の形のまま因数分解すると見通しが良いことがある。

[例題 5] (P.92)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & ca - bc & ab - bc \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & -(b-a)c & -(c-a)b \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & -c & -b \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} -c & -b \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} -c & c-b \\ b+a & c-b \end{vmatrix} \\
 &= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} -c & 1 \\ b+a & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)
 \end{aligned}$$