本日やること

1. 行列式
   - 余因子・余因子行列
   - 行列式と逆行列
   - 多項式の因数分解

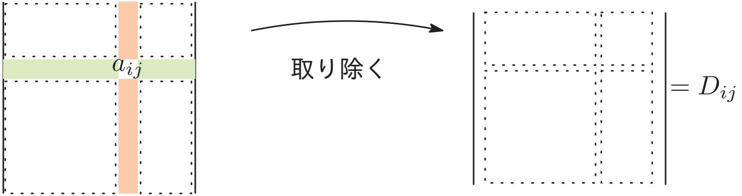
行列式

復習:行列式の展開

復習：小行列式の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して第 i 行 第 j 列の成分を取り除いてできる行列の行列式



を $|A|$ の (i, j) 成分の小行列式といい D_{ij} で表す。

行列式

行列式の展開

余因子・余因子行列の定義

$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を $|A|$ の (i, j) 余因子とよぶ。

$\tilde{\boldsymbol{A}} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$ を $\boldsymbol{A}$ の余因子行列とよぶ。

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ の (i, j) 成分を $\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ と書くと $\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ となることに注意。

行列式

余因子・余因子行列

[復習：行列式の第 i 行, 第 j 列に関する展開]

(i) $|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in}$

(ii) $|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}$

であったがこれを余因子で書き直すと

$$\text{(i)}\quad |A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} \cdots (\star)$$

$$\text{(ii)}\quad |A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} \cdots (\star\star)$$

が得られる。さらに

行列式

余因子・余因子行列

余因子の性質

(i) $$a_{i'1}\tilde{a}_{i1} + a_{i'2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{i'n}\tilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{i'k}\tilde{a}_{ik} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & i = i' \text{のとき} \\ 0 & i \neq i' \text{のとき} \end{cases}$$

(ii) $$a_{1j'}\tilde{a}_{1j} + a_{2j'}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj'}\tilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj'}\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & j = j' \text{のとき} \\ 0 & j \neq j' \text{のとき} \end{cases}$$

行列式
余因子・余因子行列

[(i) の確かめ]

$$
\text{(i) の左辺} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i'1} & \cdots & a_{i'j} & \cdots & a_{i'n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

だから $|\boldsymbol{A}|$ の第 i 行を 第 i' 行で置き換えたものである。したがって

$i = i'$ のときは $(\star)$ により $|\boldsymbol{A}|$ に一致。

$i \neq i'$ のときは 第 i' 行と 第 i 行 が一致するので行列式の性質により 0.

(ii) も同様。

行列式

余因子・余因子行列

補題：余因子行列の性質

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} \quad (\boldsymbol{E}\text{ は単位行列})$$

[確かめ]

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}}\text{の }(i,j)\text{ 成分} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{\boldsymbol{A}}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & i=j\text{ のとき} \\ 0 & i\neq j\text{ のとき} \end{cases}$$

だから $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ も同様。

行列式

行列式と逆行列

定理：余因子行列による逆行列の構成

正方行列 $\boldsymbol{A}$ が正則 $\iff$ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$

このとき

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}$$

[確かめ]

$\Rightarrow$ は第 4 回にやった。

$\Leftarrow$ は補題より明らか。

行列式

応用：多項式の因数分解

多項式の因数分解

成分に文字を含む行列式は多項式となるが、行列式の形のまま因数分解すると見通しが良いことがある。

[例題 5] (P.92)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & ca-bc & ab-bc \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & -(b-a)c & -(c-a)b \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & -c & -b \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} -c & -b \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} -c & c-b \\ b+a & c-b \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} -c & 1 \\ b+a & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)
$$