本日やること

1. 行列式
   - 行列式の性質
   - 行列式の展開

行列式
行列式の性質

行列の積の行列式

A, B : (n 次) 正方行列のとき

$$|AB| = |A||B| \qquad (|A+B| = |A| + |B| \text{ は誤り})$$

[確かめ]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n)$$

とする。

行列式

行列式の性質

$$\vec{\boldsymbol{a}}_j = a_{1j}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{2j}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots a_{nj}\vec{\boldsymbol{e}}_n \cdots \text{(a)} \quad \vec{\boldsymbol{b}}_j = b_{1j}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_{2j}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots b_{nj}\vec{\boldsymbol{e}}_n \cdots \text{(b)}$$

を $j = 1, 2, \cdots, n$ について組み合わせ乗積し，展開・整理して

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n = |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \cdots \text{(A)}$$

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{b}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{b}}_n = |\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \cdots \text{(B)}$$

同様に (b) に A をかけた

$$A\vec{\boldsymbol{b}}_j = A(b_{1j}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_{2j}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots b_{nj}\vec{\boldsymbol{e}}_n) = b_{1j}A\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_{2j}A\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots b_{nj}A\vec{\boldsymbol{e}}_n$$

を $j = 1, 2, \cdots, n$ について組み合わせ乗積し，展開・整理すると (B) と同様に

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{b}}_1 \circ A\vec{\boldsymbol{b}}_2 \circ \cdots \circ A\vec{\boldsymbol{b}}_n = |\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n| A\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ A\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ A\vec{\boldsymbol{e}}_n$$

$A\vec{\boldsymbol{e}}_j = \vec{\boldsymbol{a}}_j$ と (A) より

$$= |\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n| \vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n$$

$$= |\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n| |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \cdots (\star)$$

行列式

行列式の性質

一方

$$AB = A(\vec{\boldsymbol{b}}_1, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n) = (A\vec{\boldsymbol{b}}_1, \cdots, A\vec{\boldsymbol{b}}_n)$$

だから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{b}}_1 \circ A\vec{\boldsymbol{b}}_2 \circ \cdots \circ A\vec{\boldsymbol{b}}_n &= |A\vec{\boldsymbol{b}}_1, \cdots, A\vec{\boldsymbol{b}}_n| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \\ &= |AB| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \cdots (\star\star) \end{aligned}$$

$(\star)$ と $(\star\star)$ を比較して

$$|AB| = |\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{b}}_n||\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n| = |A||B|$$

行列式
行列式の性質

行列が正則であるための必要条件

正方行列 A が正則（つまり逆行列 A^{-1} を持つ）$\Longrightarrow$ $|A| \neq 0,\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

[確かめ]

$$AA^{-1} = E$$

だから

$$|AA^{-1}| = |E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

一方

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

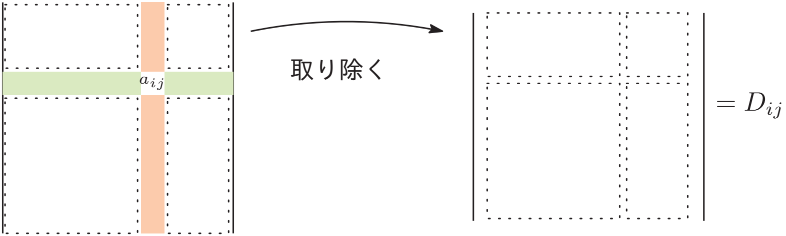
だから。

行列式

行列式の展開

小行列式の定義

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して第 i 行 j 列の成分を取り除いてできる行列の行列式



を $|A|$ の (i, j) 成分の小行列式という。

行列式

行列式の展開

[復習]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式
行列式の展開

行列式の第 1 行に関する展開

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n}$$

[確かめ] $n = 3$ の場合で説明する。

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (a_{11}, 0, 0) + (0, a_{12}, 0) + (0, 0, a_{13})$ だから

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式
行列式の展開

ところで

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} D_{11}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) a_{12} D_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{13} (-1)^2 D_{13}$$

だから分かった。

行列式
行列式の展開

行列式の第 i 行, 第 j 列に関する展開

(i) $|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}D_{in}$

(ii) $|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}$

[(i) の確かめ] 行の入れかえを繰り返して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

あとは第 1 行に関して展開すればよい。