本日やること

1. 行列式
   - 行列式の定義
   - 行列式の性質

行列式

復習：行列式の定義

復習：n 次行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{P} \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \cdots ① \\ \text{または} \\ \displaystyle\sum_{Q} \varepsilon_Q a_{Q_1 1} a_{Q_2 2} \cdots a_{Q_n n} \cdots ② \end{array}$$

ここで $\displaystyle\sum_{P}$, $\displaystyle\sum_{Q}$ は P, Q がすべての順列を亘るときの和。①, ② は等しいのでどちらを用いてもよい。

行列式

復習：行列式の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ のとき } |A| \text{ とも表す。}$$

列ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \cdots, n$

とおくと $|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n|$ とも表す。

行列式

復習：行列式の定義

[考え方]

$$\vec{\boldsymbol{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{2j}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots a_{nj}\vec{\boldsymbol{e}}_n$$

を $j = 1, 2, \cdots, n$ について組み合わせ乗積し，展開・整理したとき

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \cdots (\star)$$

となるように定義したのである。

行列式
行列式の性質

転置行列の行列式（教科書 P.91）

A が正方行列であるとき $|{}^tA| = |A|$.

[確かめ]

$B = {}^tA$ とし, A, B の i 行 j 列の成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とすると行列式の定義より

$$|A| = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \quad \text{(定義の①を用いた)}$$

$$|B| = \sum_P \varepsilon_P b_{P_1 1} b_{P_2 2} \cdots b_{P_n n} \quad \text{(定義の②を用いて } Q \text{ を } P \text{ に置き換えた)}$$

ところで $b_{ji} = a_{ij}$ だから 2 つは一致する.

行列式
行列式の性質

例題 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[確かめ]

$$左辺 = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$$

$P_1 \neq 1$ ならば $P_2, \cdots, P_n$ のどれかは $= 1$ だから $a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} = 0.$
したがって $P_1 = 1$, $(P_2, \cdots, P_n)$ は $(2, \cdots, n)$ の順列としてよいので

$$= a_{11} \sum_{(P_2,\cdots,P_n)} \varepsilon_{(1,P_2,\cdots,P_n)} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$$

$\varepsilon_{(P_2,\cdots,P_n)} = \varepsilon_{(1,P_2,\cdots,P_n)}$ だからこれは右辺に等しい.

行列式

行列式の性質

行列式の多重線形性

(I)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(II)
$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式

行列式の性質

基本変形

(III) $$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & b_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix}$$

(IV) $$\begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式
行列式の性質

基本変形

$$
\text{(V)}\quad
\begin{vmatrix}
\cdots & a_1 + cb_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\
\cdots & a_2 + cb_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\
\cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
\cdots & a_n + cb_n & \cdots & b_n & \cdots
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\
\cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\
\cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
\cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots
\end{vmatrix}
$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式

行列式の性質

[(I) の確かめ]　行列の列ベクトルを $\vec{a}_1, \vec{a}'_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ とするとき, 組み合わせ乗積の分配法則により

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}'_1) \circ \vec{a}_2 \circ \cdots \circ \vec{a}_n = \vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \circ \cdots \circ \vec{a}_n + \vec{a}'_1 \circ \vec{a}_2 \circ \cdots \circ \vec{a}_n$$

であるから, 行列式の作り方 $(\star)$ から明らか。　[(II) も同様]

[(III), (IV), (V) の確かめ]　組み合わせ乗積の性質により

$$\{\cdots \circ \vec{a} \circ \cdots \circ \vec{b} \circ \cdots\} = -\{\cdots \circ \vec{b} \circ \cdots \circ \vec{a} \circ \cdots\}$$

$$\{\cdots \circ \vec{a} \circ \cdots \circ \vec{a} \circ \cdots\} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
&\{\cdots \circ (\vec{a} + c\vec{b}) \circ \cdots \circ \vec{b} \circ \cdots\} \\
&\quad = \{\cdots \circ \vec{a} \circ \cdots \circ \vec{b} \circ \cdots\} + c\{\cdots \circ \vec{b} \circ \cdots \circ \vec{b} \circ \cdots\} \\
&\quad = \{\cdots \circ \vec{a} \circ \cdots \circ \vec{b} \circ \cdots\}
\end{aligned}$$

であるから, 行列式の作り方 $(\star)$ から明らか。

行列式

行列式の性質

[注意]　行列の基本変形と区別すること。

行基本変形

連立方程式の拡大係数行列に対して，行基本変形
(I)　1 つの行に 0 でない数をかける。
(II)　1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)
(III)　2 つの行を入れ替える
をしても連立方程式の解は変わらない。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式
行列式の性質

[例題]

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第 2 行と交換} \\ \text{第 1 行と交換} \\ \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{第 1 行 } \times 3 \text{ を引く} \\ \text{第 1 行 } \times 2 \text{ を引く} \\ \text{第 1 行 } \times 2 \text{ をたす} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{第 1 行 } \times 3 \text{ をたす}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -11 & -10 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} = 30 - 55 = -25$$