

本日よりこと

① 行列式

- 行列式の定義
- 行列式の性質

行列式

復習：行列式の定義

復習： n 次行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \cdots \textcircled{1}$$

または

$$\sum_Q \varepsilon_Q a_{Q_1 1} a_{Q_2 2} \cdots a_{Q_n n} \cdots \textcircled{2}$$

ここで \sum_P, \sum_Q は P, Q がすべての順列を亘るときの和。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ は等しいのでどちらを用いてもよい。

行列式

復習：行列式の定義

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{のとき } |A| \text{ とも表す。}$$

$$\text{列ベクトルを } \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

とおくと $|\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n|$ とも表す。

行列式

復習：行列式の定義

[考え方]

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

を $j = 1, 2, \dots, n$ について組み合わせ乗積し、展開・整理したとき

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \circ \cdots \circ \vec{a}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n \quad \cdots (*)$$

となるように定義したのである。

行列式

行列式の性質

転置行列の行列式 (教科書 P.91)

A が正方行列であるとき $|{}^t A| = |A|$.

[確かめ]

$B = {}^t A$ とし, A, B の i 行 j 列の成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とすると行列式の定義より

$$|A| = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \quad (\text{定義の①を用いた})$$

$$|B| = \sum_P \varepsilon_P b_{P_1 1} b_{P_2 2} \cdots b_{P_n n} \quad (\text{定義の②を用いて } Q \text{ を } P \text{ に置き換えた})$$

ところで $b_{ji} = a_{ij}$ だから 2 つは一致する.

行列式

行列式の性質

例題 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[確かめ]

$$\text{左辺} = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$$

$P_1 \neq 1$ ならば P_2, \dots, P_n のどれかは $= 1$ だから $a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} = 0$.
したがって $P_1 = 1$, (P_2, \dots, P_n) は $(2, \dots, n)$ の順列としてよいので

$$= a_{11} \sum_{(P_2, \dots, P_n)} \varepsilon_{(1, P_2, \dots, P_n)} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$$

$\varepsilon_{(P_2, \dots, P_n)} = \varepsilon_{(1, P_2, \dots, P_n)}$ だからこれは右辺に等しい。

行列式

行列式の性質

行列式の多重線形性

$$(I) \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(II) \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式

行列式の性質

基本変形

$$(III) \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & b_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix}$$

$$(IV) \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & a_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式

行列式の性質

基本変形

$$(V) \begin{vmatrix} \cdots & a_1 + cb_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 + cb_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n + cb_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots & b_1 & \cdots \\ \cdots & a_2 & \cdots & b_2 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n & \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix}$$

ほかの列、行に関しても同様。

行列式

行列式の性質

[(I) の確かめ] 行列の列ベクトルを $\vec{a}_1, \vec{a}'_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ とするとき, 組み合わせ乗積の分配法則により

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}'_1) \circ \vec{a}_2 \circ \dots \circ \vec{a}_n = \vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \circ \dots \circ \vec{a}_n + \vec{a}'_1 \circ \vec{a}_2 \circ \dots \circ \vec{a}_n$$

であるから, 行列式の作り方 (★) から明らか。 [(II) も同様]

[(III), (IV), (V) の確かめ] 組み合わせ乗積の性質により

$$\{\dots \circ \vec{a} \circ \dots \circ \vec{b} \circ \dots\} = -\{\dots \circ \vec{b} \circ \dots \circ \vec{a} \circ \dots\}$$

$$\{\dots \circ \vec{a} \circ \dots \circ \vec{a} \circ \dots\} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \{\dots \circ (\vec{a} + c\vec{b}) \circ \dots \circ \vec{b} \circ \dots\} \\ &= \{\dots \circ \vec{a} \circ \dots \circ \vec{b} \circ \dots\} + c\{\dots \circ \vec{b} \circ \dots \circ \vec{b} \circ \dots\} \\ &= \{\dots \circ \vec{a} \circ \dots \circ \vec{b} \circ \dots\} \end{aligned}$$

であるから, 行列式の作り方 (★) から明らか。

行列式

行列式の性質

[注意] 行列の基本変形と区別すること。

行基本変形

連立方程式の拡大係数行列に対して、行基本変形

(I) 1つの行に0でない数をかける。

(II) 1つの行にある実数をかけたものを他の行に加える(または引く)

(III) 2つの行を入れ替える

をしても連立方程式の解は変わらない。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列式

行列式の性質

[例題]

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第2行と交換} \\ \text{第1行と交換} \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行} \times 3 \text{ を引く} \\ \text{第1行} \times 2 \text{ を引く} \\ \text{第1行} \times 2 \text{ をたす} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行} \times 3 \text{ をたす} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -11 & -10 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} = 30 - 55 = -25$$