本日やること

1. 行列式
   - 行列式の定義

行列式

行列式の定義

[復習]
2 次の行列式の定義：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3 次の行列式の定義：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

行列式

行列式の定義

2,3 次の行列式を計算するサラスの方法

2 次の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3 次の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

4 次以上では正しくない。

行列式

行列式の定義

以下, n 次の行列式を構成する。

復習　2 次の行列式の性質：

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},\quad \vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 = (a_{11}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{21}\vec{\boldsymbol{e}}_2) \circ (a_{12}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{22}\vec{\boldsymbol{e}}_2) \overset{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2$$

であった。

行列式

行列式の定義

これにならって

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots \ \vec{\boldsymbol{a}}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \ \vec{\boldsymbol{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{a}}_n \overset{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \cdots \circ \vec{\boldsymbol{e}}_n \quad \cdots (\star)$$

となるように n 次の行列式を決めたい。

行列式
行列式の定義

[n 次行列式の導出]

$$
\begin{array}{lcl}
(\star) \text{ の左辺} & & \text{取り出す項} \\
(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } P_1 \text{ 項} = a_{P_1 1}\,\vec{e}_{P_1} \\
\quad \circ\,(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } P_2 \text{ 項} = a_{P_2 2}\,\vec{e}_{P_2} \\
\qquad \vdots & & \\
\quad \circ\,(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) & \longrightarrow & \text{第 } P_n \text{ 項} = a_{P_n n}\,\vec{e}_{P_n}
\end{array}
$$

取り出した項を乗積すると

$$
a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}\,\vec{e}_{P_1}\circ\vec{e}_{P_2}\circ\cdots\circ\vec{e}_{P_n} \qquad \cdots(\star\star)
$$

$P_1, \cdots, P_n$ に同じものがあったら $=\vec{0}$ となるから
$P = (P_1, \cdots, P_n)$ は $\{1, \cdots, n\}$ の順列
としてよい.

行列式

行列式の定義

並べ替えにより

$$\vec{e}_{P_1} \circ \vec{e}_{P_2} \circ \cdots \circ \vec{e}_{P_n} = \varepsilon_P \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n$$

ただし

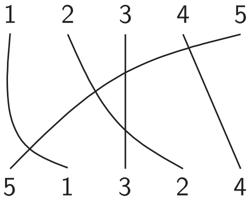
$$\varepsilon_P = \begin{cases} 1, & P \text{ は } (1, 2, \cdots, n) \text{ に入れ替えを偶数回行って得られる} \\ -1, & \text{奇数回行って得られる} \end{cases}$$

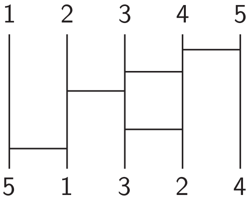
これを**順列 P の符号**という。これにより

$$(\star\star) = a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \, \varepsilon_P \, \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n \quad \cdots (\star\star\star)$$

行列式
行列式の定義

[順列のあみだくじによる表示]





あみだくじの横線の数を r とするとき

$$\varepsilon_P = (-1)^r$$

である。

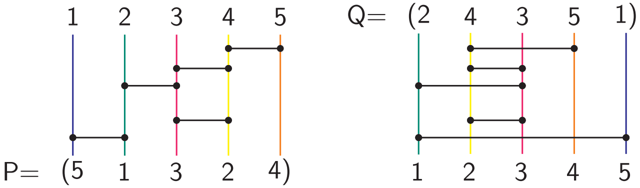
行列式

行列式の定義

$a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ を列番号順に並び替えて $a_{Q_1 1}a_{Q_2 2}\cdots a_{Q_n n}$ となったとすると, $Q_1,\cdots,Q_n$ は $1,\cdots,n$ を並べ替えたものだから

$$Q=(Q_1,\cdots,Q_n)$$

も順列となる。対応：$1\mapsto P_1,\ \cdots\ n\mapsto P_n$ は対応：$Q_1\mapsto 1,\ \cdots\ Q_n\mapsto n$ と同じものだから, 縦線を並べ替えることにより



としても横線の数は変わらないから

$$\varepsilon_P=\varepsilon_Q$$

行列式

行列式の定義

以上から

$$
\begin{aligned}
(\star)\ \text{の左辺} &= \sum_P a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}\,\varepsilon_P\,\vec{\boldsymbol{e}}_1\circ\vec{\boldsymbol{e}}_2\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{e}}_n \\
&= \sum_Q a_{Q_1 1}a_{Q_2 2}\cdots a_{Q_n n}\,\varepsilon_Q\,\vec{\boldsymbol{e}}_1\circ\vec{\boldsymbol{e}}_2\circ\cdots\circ\vec{\boldsymbol{e}}_n
\end{aligned}
$$

であるから

n 次行列式の定義

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n} = \sum_Q \varepsilon_Q a_{Q_1 1}a_{Q_2 2}\cdots a_{Q_n n}
$$

ここで $\sum_P$ は P がすべての順列を亘るときの和