線形代数 B 演習問題 No.13 解答例	学生番号 □□□□□□□		

13.1. (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の対角化行列 (直交行列にできる) を求め, 対角化せよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ の解である.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \left| \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 7, 2$. (解の公式により $\lambda = \dfrac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 56}}{2} = \dfrac{9 \pm 5}{2}$ でもよい)

(step2-1) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求める.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 6-2 & 2 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 = -x_2$$

したがって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c_1 は 0 でない任意の数)

大きさを 1 にするには $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ だから $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とすればよいので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(step2-2) $\lambda = 7$ に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求める

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 6-7 & 2 \\ 2 & 3-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

したがって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c_2 は 0 でない任意の数

大きさを 1 にするには $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ だから $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とすればよいので

$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Step3) 固有ベクトルを並べて対角化行列 $\boldsymbol{T}$ をつくると $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ が得られる。これにより $\boldsymbol{A}$ を対角化すると ${}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot (\star)$

(Step4) 確かに $(\star)$ となるか 検算する。

$\boldsymbol{T}^{-1} = {}^t\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となることを各自計算して確かめよ。

(2) 2 次形式 $6x^2+4xy+3y^2$ の標準形を求めよ.

$$6x^2+4xy+3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}{}^t\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x',y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= 2x'^2 + 7y'^2$$

ただし $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$

これが標準形。

(3) (追加) $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ。

$({}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2 = {}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}{}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = {}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T},\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$ に注意して

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{T} &= {}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T} - 2{}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \left({}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^2 - 2{}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 7^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\times 2 & 0 \\ 0 & 2\times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^2 - 2\times 2 & 0 \\ 0 & 7^2 - 2\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから固有値は $0, 35$.