

--	--	--	--	--	--	--	--

12

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ の解である.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行を}(1-\lambda)\text{倍して引く} \\ \text{第1行をたす} \end{array} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & -1 - (-1+\lambda)(1-\lambda) & 1 - (-1)(1-\lambda) \\ 0 & -1 + (-1+\lambda) & 3-\lambda + (-1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda & -\lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda(\lambda - 2) & -\lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

第2行, 第3行から $\lambda - 2$ をくくりだす.

$$= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

第1列で展開

$$= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 1, 2$ (2重解).

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル \mathbf{x} を求める

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \text{ となるから } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

したがって $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ とおくと $x_1 = -c_1 + c_2$ となるので

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0, c_2 \neq 0 \text{ は任意})$$

がすべての固有ベクトルを与える。

検算する。

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x} \end{aligned}$$

だから正しい。

(step3) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル \mathbf{y} を求める

$$A\mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{y} \text{ となるから } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -y_1 + y_3 = 0, \quad -y_2 + y_3 = 0$$

したがって $y_3 = c_3$ とおくと $y_1 = y_2 = c_3$ となるので

$$\mathbf{y} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0 \text{ は任意})$$

がすべての固有ベクトルを与える。

検算する。

$$A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

だから正しい。

(Step 4) 対角化する。得られた固有ベクトル $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を作る。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

実際に検算して確かめること。