線形代数 B 演習問題 No.11 解答	学生番号		

11.1 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ の解である.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(5-\lambda) - 2 \times (-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0
\end{aligned}
$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 2, 3$.

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ となるから $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 2x_1 \\ -3x_2 + 5x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ x = y$

したがって

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_1は任意の数

(Step3) $\lambda = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を求める

$\boldsymbol{Ay} = 3\boldsymbol{y}$ となるから $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_2 = 3y_1 \\ -3y_1 + 5y_2 = 3y_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ 2y_2 = 3y_1$

したがって

$$\boldsymbol{v} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ または } c_2' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c_2, c_2' は任意の数