本日やること

1. 連立 1 次方程式と行列
   - 掃き出し法と階段行列
   - 逆行列と連立 1 次方程式
   - 逆行列を用いた連立一次方程式の解法
   - 行列の階数

連立 1 次方程式と行列

復習：連立方程式・行基本変形

[復習：連立方程式・拡大係数行列]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ とおく。拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法

拡大係数行列 $\tilde{A}$ において

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{i1} = \cdots = a_{i\,j-1} = 0$$

のとき

(i) **第 i 行を a_{ij} で割る，** (ii) **第 k 行 ($i \neq k$) から第 i 行の a_{kj} 倍を引く**

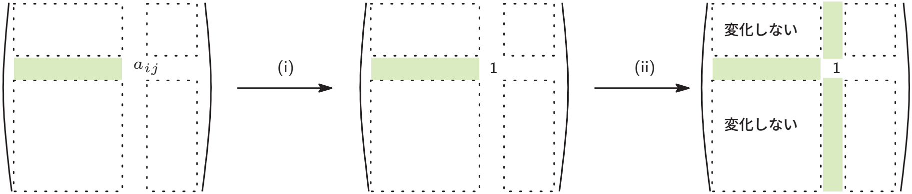
ことを行うと

$a_{ij} \to 1, \quad a_{kj} \to 0, (i \neq k)$ **第 1 列から第 $j-1$ 列は変化しない。**

のように変形される。この手続きを「a_{ij} を要（かなめ・Pivot）として第 j 列を掃き出す」という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法



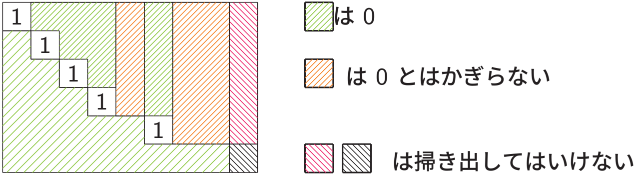
(緑は成分が 0 であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

この手続きを $(i,j)=(1,1)$ から 次のように繰り返す。
a_{ij} が Pivot のとき次の Pivot を以下のようにして選ぶ。
1. $a_{i+1,j+1},\cdots,a_{m,j+1}$ に 0 でないものがあれば, 行を入れ替えて $(i+1\,j+1)$ 成分に持ってきて Pivot とする。
2. $a_{i+1,j+1}=\cdots=a_{m,j+1}=0$ のときは $a_{i+1,j+2},\cdots,a_{m,j+2}$ から 0 でないものを探し, 1 のことを繰り返す。
3. j が n に達したらやめる。右端の列は掃き出さない。

このことにより次のような「階段行列」



に変形することができる。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1)\quad \begin{cases} x + + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$$ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(1) \iff \begin{cases} x + 3z = 1 \\ y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3z = 1 \\ y - (2/3)z = 1/3 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが, $z = t$ とおくことによりすべての解は

$$\iff \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

(2) $\begin{cases} x+ \quad +3z = 1 \\ 2x+3y+4z = 3 \\ x+3y+\ z = 3 \end{cases}$ の拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(2) \iff \begin{cases} x \quad + \quad 3z = 1 \\ \quad y-(2/3)z = 1/3 \\ 0x+0y+ \quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff$ A は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

[逆行列を用いた連立一次方程式の解法]

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

を逆行列を用いて解く

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{b}}}$$

$$\iff A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

A が正則ならば A^{-1} をかけて

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$A^{-1}A = E$ だから右辺 $= E\vec{x} = \vec{x}$ で

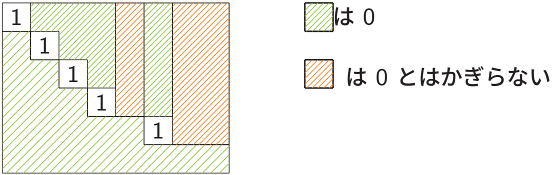
$$\iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

A が正則でないときは (5) は不定または不能。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

行列の階数

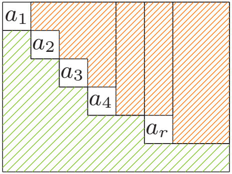


のような行列を階段行列という。0 でない行の数を階段行列の階数という。$m \times n$ 型行列 A が行基本変形により階段行列に変形されるとき、変形された階段行列の階数はもとの行列により決まってくる。この数を A の階数といい $\mathrm{rank}(A)$ で表す。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

[注意]　教科書では



（緑の斜線）は 0

（橙の斜線）は 0 とはかぎらない

$a_1, \cdots, a_r$ は 0 でない

の形の行列を階段行列とよんでいるが，本質的に同じことで階数の定義に影響はない。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(\tilde{A}) \ \Rightarrow$ 連立方程式は解を持たない。

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A}) \ \Rightarrow$ 連立方程式は解を持つ。

$m = n = \mathrm{rank}(A) \ \Leftrightarrow$ 連立方程式は右辺によらず常にただ一つの解を持つ。