

# 本日やること

- ① 連立 1 次方程式と行列
  - 掃き出し法と階段行列
  - 逆行列と連立 1 次方程式
  - 逆行列を用いた連立一次方程式の解法
  - 行列の階数



# 連立 1 次方程式と行列

## 行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列  $\tilde{A}$  に対して

- (I) 1 つの行に 0 でない数をかける。
- (II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)
- (III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

# 連立 1 次方程式と行列

## 掃き出し法

### Pivot・掃き出し法

拡大係数行列  $\tilde{A}$  において

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{i1} = \cdots = a_{ij-1} = 0$$

のとき

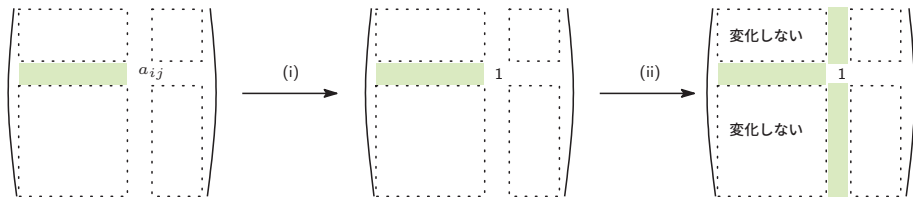
(i) 第  $i$  行を  $a_{ij}$  で割る, (ii) 第  $k$  行 ( $i \neq k$ ) から第  $i$  行の  $a_{kj}$  倍を引く  
ことを行うと

$$a_{ij} \rightarrow 1, \quad a_{kj} \rightarrow 0, \quad (i \neq k) \quad \text{第 1 列から第 } j-1 \text{ 列は変化しない。}$$

のように変形される。この手続きを「 $a_{ij}$  を要 (かなめ・Pivot) として第  $j$  列を掃き出す」という。

# 連立 1 次方程式と行列

## 掃き出し法



(緑は成分が 0 であることを表す)

# 連立 1 次方程式と行列

## 掃き出し法

この手続きを  $(i, j) = (1, 1)$  から 次のように繰り返す。

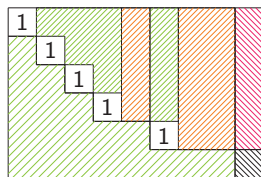
$a_{ij}$  が Pivot のとき次の Pivot を以下のようにして選ぶ。

1.  $a_{i+1,j+1}, \dots, a_{m,j+1}$  に 0 でないものがあれば、行を入れ替えて  $(i+1, j+1)$  成分に持ってきて Pivot とする。

2.  $a_{i+1,j+1} = \dots = a_{m,j+1} = 0$  のときは  $a_{i+1,j+2}, \dots, a_{m,j+2}$  から 0 でないものを探し、1 のことを繰り返す。



3.  $j$  が  $n$  に達したらやめる。右端の列は掃き出さない。

このことにより次のような「階段行列」



 は 0

 は 0 とはかぎらない

  は掃き出してはいけない

に変形することができる。

## 連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 2 \end{cases} \text{ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \end{cases}$$

# 連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが,  $z = t$  とおくことによりすべての解は

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。



## 連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

$$(2) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 3 \end{cases} \text{ の拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(2) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

# 連立 1 次方程式と行列

## 逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる  $\iff A$  は逆行列を持たない

この方法は  $n$  次正方行列でも正しい。

# 連立 1 次方程式と行列

## 逆行列を用いた連立一次方程式の解法

[逆行列を用いた連立一次方程式の解法]

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

を逆行列を用いて解く

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \vec{x} \quad \vec{b}$$

$$\iff A\vec{x} = \vec{b}$$

# 連立 1 次方程式と行列

## 逆行列を用いた連立一次方程式の解法

$A$  が正則ならば  $A^{-1}$  をかけて

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$A^{-1}A = E$  だから右辺  $= E\vec{x} = \vec{x}$  で

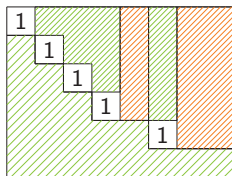
$$\iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$A$  が正則でないときは (5) は不定または不能。

# 連立 1 次方程式と行列

## 行列の階数

### 行列の階数



は 0

は 0 とはかぎらない

のような行列を階段行列という。0 でない行の数を階段行列の階数という。 $m \times n$  型行列  $A$  が行基本変形により階段行列に変形されるとき、変形された階段行列の階数はもとの行列により決まってくる。この数を  $A$  の階数といい  $\text{rank}(A)$  で表す。


# 連立 1 次方程式と行列

## 行列の階数

[注意] 教科書では



 は 0

 は 0 とはかぎらない

$a_1, \dots, a_r$  は 0 でない

の形の行列を階段行列とよんでいるが、本質的に同じことで階数の定義に影響はない。

# 連立 1 次方程式と行列

## 行列の階数

$\text{rank}(A) < \text{rank}(\tilde{A}) \Rightarrow$  連立方程式は解を持たない。

$\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) \Rightarrow$  連立方程式は解を持つ。

$m = n = \text{rank}(A) \Leftrightarrow$  連立方程式は右辺によらず常にただ一つの解を持つ。