本日やること

1. 連立 1 次方程式と行列
   - 掃き出し法と標準形
   - 逆行列と連立 1 次方程式

連立 1 次方程式と行列

復習：連立方程式・行基本変形

[復習：連立方程式・拡大係数行列]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ とおく。拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法

拡大係数行列 $\tilde{A}$ において

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{i1} = \cdots = a_{i\,j-1} = 0$$

のとき

第 i 行を a_{ij} で割る，　第 k 行 $(i \neq k)$ から第 i 行の a_{kj} 倍を引く

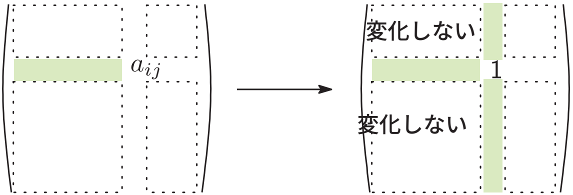
ことを行うと

$a_{ij} \to 1, \quad a_{kj} \to 0, (i \neq k)$　第 1 列から第 $j-1$ 列は変化しない。

のように変形される。この手続きを「a_{ij} を要（かなめ・Pivot）として第 j 列を掃き出す」という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

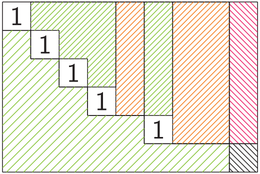


(緑は成分が 0 であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

この手続きを $(i, j) = (1, 1)$ から 次のように繰り返す。
a_{ij} が Pivot のとき次の Pivot を以下のようにして選ぶ。
1. $a_{i+1,j+1}, \cdots, a_{m,j+1}$ から 0 でないものがあれば行を入れ替えて $(i+1\ j+1)$ 成分に持ってきて Pivot とする。
2．$a_{i+1,j+1} = \cdots = a_{m,j+1} = 0$ のときは $a_{i+1,j+2}, \cdots, a_{m,j+2}$ から 0 でないものを探す。
このことにより次のような「階段行列」



に変形することができる。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1)\quad \begin{cases} x+\quad +3z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ x+3y+\ z=2 \end{cases}$$ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(1) \iff \begin{cases} x \quad + \quad 3z = 1 \\ \quad y-(2/3)z = 1/3 \\ 0x+0y+\quad 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad 3z = 1 \\ \quad y-(2/3)z = 1/3 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが, $z = t$ とおくことによりすべての解は

$$\iff \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

(2) $\begin{cases} x+\quad +3z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ x+3y+\ z=3 \end{cases}$ の拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となるので

$$(2) \iff \begin{cases} x \quad + \quad 3z = 1 \\ \quad y-(2/3)z = 1/3 \\ 0x+0y+ \quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

[掃き出し法による逆行列の求め方]

$$(\star)\quad \underset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}} = \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

を満たす X を求めよう。

$$(\star) \iff \begin{cases} ax+bz = 1 \\ cx+dz = 0 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} ay+bw = 0 \\ cy+dw = 1 \end{cases}$$

だから二つの拡大係数行列をまとめて行基本変形して

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\clubsuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$ となったとすると

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

である。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

$XY = E$ となる Y を求めたい。そのために ♣ と逆の行基本変形 ♠ を行うと

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\spadesuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

となるので $Y = A$。したがって $XA = E$ となり $X = A^{-1}$ であることがわかる。まとめると

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff$ A は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。