

# 本日やること

## ① 連立 1 次方程式と行列

- 消去法:方程式の解を変えない変形
- ガウス・ジョルダンの消去法
- 行列を用いた解法
- 不能・不定の場合

# 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

連立 1 次方程式を行列の変形を用いて系統的に解くことができる。  
この方法を述べる。

# 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

### 等式の変形

$A, B, C, D, k \in \mathbb{R}$  とする。

$$(I) \quad A = B, C = D \Rightarrow A \pm C = B \pm D$$

$$(II) \quad k \neq 0 \text{ のとき } 「A = B \Leftrightarrow kA = kB」$$

## 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

方程式の解を変えない変形

(I)  $k \neq 0$  とするとき

$(x, y, z)$  が  $ax + by + cz = 0$  の解

$\Leftrightarrow (x, y, z)$  が  $k(ax + by + cz) = 0$  の解

(II)  $c \in \mathbb{R}$  とするとき

$(x, y, z)$  が  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots \textcircled{1} \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$  の解

$\Leftrightarrow$

$(x, y, z)$  が  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots \textcircled{1} \\ (a_2x + b_2y + c_2z) + c(a_1x + b_1y + c_1z) = 0 \cdots \textcircled{2} + c\textcircled{1} \end{cases}$  の解

## 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

[例題] (1) から (7) の解は変わらない:

$$(1) \quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 & \text{第 3 式と入れ替え} \\ 4x-y-z=5 \\ x-y+2z=2 & \text{第 1 式と入れ替え} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 4x-y-z=5 & \text{(第 1 式)×4 をひく} \\ 3x+y-7z=0 & \text{(第 1 式)×3 をひく} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3y-9z=-3 \\ 4y-13z=-6 \end{cases} \quad \times \frac{1}{3}$$

## 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

$$(4) \begin{cases} x - y + 2z = 2 & \text{(第 2 式) をたす} \\ y - 3z = -1 \\ 4y - 13z = -6 & \text{(第 2 式) } \times 4 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 3z = -1 \\ -z = -2 & \times (-1) \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x - z = 1 & \text{(第 3 式) をたす} \\ y - 3z = -1 & \text{(第 3 式) } \times 3 \text{ をたす} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

# 連立 1 次方程式と行列

## ガウス・ジョルダンの消去法

### ガウス・ジョルダンの消去法

連立方程式に対して

- (I) 1 つの式に 0 でない数をかける。
- (II) 1 つの式に実数をかけたものを他の式に加える (または引く)
- (III) 2 つの式を入れ替える

ことをしても解が変わらないことを利用して

$$\begin{cases} x & = * \\ y & = * \\ z & = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法をガウス・ジョルダンの消去法という。

# 連立 1 次方程式と行列

## ガウスの消去法

[参考] ガウス・ジョルダンの消去法に対して

$$\begin{cases} x + *y + *z = * \\ y + *z = * \\ z = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法をガウスの消去法という。



## 連立 1 次方程式と行列

## 行列を用いた解法

係数行列・拡大係数行列

$$(1) \quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 \\ 4x-y-z=5 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A$  とおく。係数行列という。

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$  とおく。拡大係数行列という。

# 連立 1 次方程式と行列

## 行基本変形

### 行基本変形

拡大係数行列  $\tilde{A}$  に対して

- (I) 1 つの行に 0 でない数をかける。
- (II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)
- (III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

# 連立 1 次方程式と行列

## 行列を用いた解法

[例題 1]

$$(\star) \begin{cases} 2x + y - 5z = -1 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列のみに着目して行基本変形する。

# 連立 1 次方程式と行列

## 行列を用いた解法

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \text{ 行と入れ替え} \\ 1 \text{ 行と入れ替え} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \text{ 行を } 2 \text{ 倍して引く} \\ 1 \text{ 行を } 3 \text{ 倍して引く} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \text{ 行を } \frac{1}{3} \text{ 倍してたす} \\ 2 \text{ 行をたす} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} -\frac{1}{8} \text{ 倍する}$$

# 連立 1 次方程式と行列

## 行列を用いた解法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3 \text{ 行を } \frac{4}{3} \text{ 倍してたす} \\ 3 \text{ 行を } 7 \text{ 倍してたす} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \text{ 倍する}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x & =1 \\ y & =2 \\ z & =1 \end{cases}$$

# 連立 1 次方程式と行列

## 消去法

1. ガウスの消去法・掃き出し法は未知数  $n$  個、方程式  $m$  個の場合でも同様にできる。
2.  $n > m$  でも解がないとは限らないし  $n < m$  でも解があるとは限らない。また、解は一組であるとも限らない。