本日やること

1. 連立 1 次方程式と行列
    - 消去法:方程式の解を変えない変形
    - ガウス・ジョルダンの消去法
    - 行列を用いた解法
    - 不能・不定の場合

連立 1 次方程式と行列

消去法

連立 1 次方程式を行列の変形を用いて系統的に解くことができる。
この方法を述べる。

連立 1 次方程式と行列

消去法

等式の変形

$A, B, C, D, k \in \mathbb{R}$ とする。

(I) $A = B,\ C = D \ \Rightarrow \ A \pm C = B \pm D$

(II) $k \neq 0$ のとき 「$A = B \ \Leftrightarrow \ kA = kB$」

連立 1 次方程式と行列

消去法

方程式の解を変えない変形

(I) $k \neq 0$ **とするとき**

(x, y, z) **が** $ax + by + cz = 0$ **の解**

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) **が** $k(ax + by + cz) = 0$ **の解**

(II) $c \in \mathbb{R}$ **とするとき**

(x, y, z) **が** $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \cdots ② \end{cases}$ **の解**

$\Leftrightarrow$

(x, y, z) **が**

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ (a_2x + b_2y + c_2z) + c(a_1x + b_1y + c_1z) = 0 \cdots ② + c① \end{cases}$ **の解**

連立 1 次方程式と行列

消去法

[例題] (1) から (7) の解は変わらない:

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 & \text{第 3 式と入れ替え} \\ 4x-y-z=5 & \\ x-y+2z=2 & \text{第 1 式と入れ替え} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 4x-y-z=5 & \text{(第 1 式)}\times 4 \text{ をひく} \\ 3x+y-7z=0 & \text{(第 1 式)}\times 3 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 3y-9z=-3 & \times \dfrac{1}{3} \\ 4y-13z=-6 & \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

$$(4)\quad \begin{cases} x- \ y+ \ 2z = \ \ 2 & \text{(第 2 式) をたす} \\ \qquad y- \ 3z =-1 & \\ \qquad 4y-13z =-6 & \text{(第 2 式)}\times 4 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} x \qquad - \ z = \ \ 1 & \\ \qquad y-3z =-1 & \\ \qquad\quad - \ z =-2 & \times(-1) \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} x \qquad - \ \ z = \ \ 1 & \text{(第 3 式) をたす} \\ \qquad y- \ 3z =-1 & \text{(第 3 式)}\times 3 \text{ をたす} \\ \qquad\qquad z = \ \ 2 & \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} x \qquad\qquad = \ \ 3 \\ \qquad y \qquad = \ \ 5 \\ \qquad\qquad z = \ \ 2 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

ガウス・ジョルダンの消去法

ガウス・ジョルダンの消去法

連立方程式に対して

(I) 1 つの式に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの式に実数をかけたものを他の式に加える (または引く)

(III) 2 つの式を入れ替える

ことをしても解が変わらないことを利用して

$$\begin{cases} x & & & = * \\ & y & & = * \\ & & z & = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法をガウス・ジョルダンの消去法という。

連立 1 次方程式と行列

ガウスの消去法

[参考]　ガウス・ジョルダンの消去法に対して

$$\begin{cases} x + * y + * z = * \\ \quad\quad\; y + * z = * \\ \quad\quad\quad\quad\; z = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法をガウスの消去法という。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

係数行列・拡大係数行列

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 \\ 4x-y-z=5 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A とおく。係数行列という。

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ とおく。拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

行基本変形

拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して
(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

[例題 1]

$$(\star)\quad \begin{cases} 2x + y - 5z = -1 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列のみに着目して行基本変形する。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$
\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \text{2 行と入れ替え} \\ \text{1 行と入れ替え} \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \text{1 行を 2 倍して引く} \\ \text{1 行を 3 倍して引く} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \text{2 行を } \frac{1}{3} \text{ 倍してたす} \\ \\ \text{2 行をたす} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{8} \text{ 倍する} \end{array}
\end{array}
$$

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3\text{ 行を } \frac{4}{3}\text{ 倍してたす} \\ 3\text{ 行を } 7\text{ 倍してたす} \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\text{ 倍する}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

1．ガウスの消去法・掃き出し法は 未知数 n 個、方程式 m 個の場合でも同様にできる。

2．$n > m$ でも解がないとは限らないし $n < m$ でも解があるとは限らない。また、解は一組であるとも限らない。