本日やること

1. 行列
   - 転置行列
   - 逆行列

行列

転置行列

対称行列・交代行列

正方行列 A が 対称行列 $\Leftrightarrow$ $A = {}^tA$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

正方行列 A が 交代行列 $\Leftrightarrow$ $A = -{}^tA$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji}$

例： $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

A： 正方行列 のとき　$\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ は対称行列　$\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ は交代行列

行列
逆行列

逆行列の定義

A, X : n 次正方行列, E : n 次単位行列 のとき

X は A の逆行列であるとは $AX = XA = E$ となること.

記号 $X = A^{-1}$ で表す.

数の世界では

$a \times 1 = 1 \times a = a$

$a \times x = x \times a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{a}, \quad (a \neq 0$ なら $\dfrac{1}{a}$ がある$)$

正方行列の世界では

$AE = EA = A$

$AX = XA = E \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}, \quad (A \neq 0$ でも A^{-1} があるとは限らない$)$

行列

逆行列

2 次正方行列の逆行列の存在する条件

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

このとき A は正則であるという。

(ii) このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

行列
逆行列

[(i) の $\Leftarrow$, (ii) の確かめ]　$ad - bc \neq 0$ だから

$$X = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

同様にして

$$XA = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

したがって

$$X = A^{-1}$$

行列
逆行列

[(i) の $\Rightarrow$ の確かめ] $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $AX = E$ とする

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} ax + bz &= 1 \qquad & ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0 \qquad & cy + dw &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} adx + bdz &= d \quad & ady + bdw &= 0 \\ cbx + dbz &= 0 \quad & cby + dbw &= b \end{aligned} \Rightarrow \quad (ad-bc)x = d, \quad (ad-bc)y = -b$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} acx + bcz &= c \quad & acy + bcw &= 0 \\ cax + daz &= 0 \quad & cay + daw &= a \end{aligned} \Rightarrow \quad (ad-bc)z = -c, \quad (ad-bc)w = a$$

ここで $ad - bc = 0$ とすると $A = 0$ となり $(\star)$ に反するので矛盾。

行列

例題

[例題 6.] $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

$$AX = B \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \right) \quad \cdots (\star)$$

となる $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

[数の世界では] $ax = b$ $(a \neq 0)$ の解 x は両辺に $\dfrac{1}{a}$ をかけて

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b \iff 1x = \frac{b}{a} \iff x = \frac{b}{a}$$

これと同じ方法が使えないか?

行列

例題

[例題 6. の解]　$(-1)\cdot 1 - 3\cdot 2 = -7 \neq 0$ だから A は正則で, A^{-1} が存在するから $(\star)$ の両辺にかけて

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad\Longleftrightarrow\quad EX = A^{-1}B \quad\Longleftrightarrow\quad X = A^{-1}B$$

とすればよい。

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$X = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

行列

正則行列の積

正則行列の積

n 次正方行列 A, B が正則であるとき, 積 AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

[確かめ] 仮定より A^{-1}, B^{-1} が存在する.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$
$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

だから。