本日やること

1. 行列
   - 転置行列
   - 逆行列

行列

逆行列

逆行列の定義

A, X : n 次正方行列, E : n 次単位行列 のとき
X は A の逆行列であるとは $AX = XA = E$ となること.
記号 $X = A^{-1}$ で表す.

数の世界では

$a \times 1 = 1 \times a = a$

$a \times x = x \times a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{a}, \quad (a \neq 0$ なら $\dfrac{1}{a}$ がある$)$

正方行列の世界では

$AE = EA = A$

$AX = XA = E \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}, \quad (A \neq 0$ でも A^{-1} があるとは限らない$)$

行列

逆行列

2 次正方行列の逆行列の存在する条件

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

このとき A は**正則である**という。

(ii) このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

行列
逆行列

[(i) の $\Leftarrow$, (ii) の確かめ]　$ad - bc \neq 0$ だから

$$X = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

同様にして

$$XA = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

したがって

$$X = A^{-1}$$

行列
逆行列

[(i) の $\Rightarrow$ の確かめ]　$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$,　$AX = E$　とする

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} ax + bz = 1 & ay + bw = 0 \\ cx + dz = 0 & cy + dw = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} adx + bdz = d & ady + bdw = 0 \\ cbx + dbz = 0 & cby + dbw = b \end{matrix} \Rightarrow \quad (ad-bc)x = d, \quad (ad-bc)y = -b$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} acx + bcz = c & acy + bcw = 0 \\ cax + daz = 0 & cay + daw = a \end{matrix} \Rightarrow \quad (ad-bc)z = -c, \quad (ad-bc)w = a$$

ここで $ad - bc = 0$ とすると $A = 0$ となり $(\star)$ に反するので矛盾。

行列
例題

[例題 6.] $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

$$AX = B \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \right) \quad \cdots (\star)$$

となる $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

[数の世界では] $ax = b$ $(a \neq 0)$ の解 x は両辺に $\dfrac{1}{a}$ をかけて

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b \quad \Longleftrightarrow \quad 1x = \frac{b}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

これと同じ方法が使えないか?

行列

例題

[例題 6. の解]　$(-1)\cdot 1 - 3\cdot 2 = -7 \neq 0$ だから A は正則で, A^{-1} が存在するから $(\star)$ の両辺にかけて

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \iff EX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

とすればよい。

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$X = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

行列

正則行列の積

正則行列の積

n 次正方行列 A, B が正則であるとき, 積 AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

[確かめ] 仮定より A^{-1}, B^{-1} が存在する.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$
$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

だから。