本日やること

1. 行列
   - 行列の積
   - 転置行列

行列

復習：行列の積の定義

[行ベクトル $\times$ 列ベクトルの場合]

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)$$

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列

復習：行列の積の定義

復習：行列の積の定義

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdot & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots\cdot & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \left(= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right) \quad i = 1, \cdots, l, \ \ j = 1, \cdots, n$$

で定める。

c_{ij} は第 i 行ベクトルと第 j 列ベクトルの積である。

行列
行列の積

行列の積の演算法則

A, B, C : 行列, k : スカラー, 行列の積が定義されるとき

(I) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(II) $(AB)C = A(BC)$

(III) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$

[(II) の確かめ] $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ とする。

$AB = (\alpha_{ik})$ とおくと $\alpha_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$ だから

$(AB)C$ の (il) 成分 $= \sum_k \alpha_{ik} c_{kl} = \sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k,j} (a_{ij} b_{jk} c_{kl})$

行列

行列の積

一方 $BC = (\beta_{jl})$ とおくと $\beta_{jl} = \sum_k b_{jk} c_{kl}$ だから

$$A(BC) \text{ の } (il) \text{ 成分} = \sum_j a_{ij}\beta_{jl} = \sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right) = \sum_{j,k} (a_{ij} b_{jk} c_{kl})$$

だから一致する。

行列

行列の積

単位行列の性質

(i) A : $m \times n$ 行列, E : n 次単位行列
$\Rightarrow \quad AE = A$

(ii) A : $m \times n$ 行列, E : m 次単位行列
$\Rightarrow \quad EA = A$

[(i) の確かめ]　例で示す。

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \text{右辺}$$

(ii) も同様。

行列
行列の積

0 行列の性質

(i) $A + 0 = 0 + A = A$

(ii) $A0 = 0, \ \ 0A = 0$

行列の演算の性質は実数の演算の性質によく似ている。ただし

$AB = BA$ とは限らない

$AB = 0$ でも, $A = 0$ または $B = 0$ とは限らない

行列
転置行列

転置行列の定義

$m \times n$ 行列 A に対してその行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の転置行列といい ${}^tA$ で表す。

$$A \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = {}^tA \text{ の } (j,i) \text{ 成分}$$

と言ってもよい。

行列

転置行列

転置行列の性質

$A,\ B$: 行列

(I) ${}^t({}^tA) = A$

(II) ${}^t(kA) = k\,{}^tA$

(III) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(IV) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

[(IV) の確かめ] 行列 X の (i,j) 成分を X_{ij} と書くことにする。$({}^tX)_{ij} = X_{ji}$ だから

$$\begin{aligned}({}^tB\,{}^tA)_{ij} &= \sum_k ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_k B_{ki}A_{jk} = \sum_k A_{jk}B_{ki} \\ &= (AB)_{ji} = ({}^t(AB))_{ij}\end{aligned}$$

行列

対称行列・交代行列

対称行列・交代行列の定義

正方行列 A が 対称行列 $\Leftrightarrow A = {}^tA \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

正方行列 A が 交代行列 $\Leftrightarrow A = -{}^tA \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

A：正方行列 のとき　$\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ は対称行列　$\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ は交代行列

だから正方行列は対称行列 $+$ 交代行列 の形に分解できる。