

本日やること

1 行列

- 行列の定義
- 行列の和・スカラー倍
- 行列の積

行列

行列の定義

行列の定義

行列とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

のように数を長方形に並べたもの

成分：行列を作っている数

行：横に並んだ成分

列：縦に並んだ成分

行列

行列の定義

行列の表示

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

: m 行 n 列の行列, または $m \times n$ 行列 という。

i 行 j 列の成分を (i, j) 成分 といひ a_{ij} で表す。

行列

行列の定義

[例]

$(a_1 \cdots a_n) : n$ 次行ベクトル

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : n$ 次列ベクトル

も行列の一種と考える

行列

行列の定義

[特別な行列：**O** 行列]

すべての成分が 0 である行列

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を **O** 行列という。

行列

行列の定義

[特別な行列：正方行列] 行の数 = 列の数 = n である行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

を n 次正方行列という。とくに対角成分以外すべて 0 であるとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : n \text{ 次対角行列}$$

さらに対角成分がすべて 1 であるとき

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} : n \text{ 次単位行列 } \mathbf{E} \text{ で表す。}$$

行列

行列の和・スカラー倍

行列の和・スカラー倍

[和]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列どうしでないとなし算できない

[スカラー倍]

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \quad k : \text{実数}$$

ベクトルの和・スカラー倍と同じ考え方だから同じ性質を持つ

行列

復習：ベクトルの内積の成分表示

復習：ベクトルの内積の成分表示

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2), \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{平面の場合}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3), \vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{空間の場合}$$

行列

行列の積

行列の積：行ベクトル \times 列ベクトルの場合

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(= \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)$$

と定める。

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列

行列の積

行列の積：一般の場合

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \quad \left(= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right) \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n$$

で定める。

c_{ij} は第 i 行ベクトルと第 j 列ベクトルの積である。