

線形代数 A 演習問題 No.7 解答

1. (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき  $3X + 2A = B$  となる行列  $X$  を求めよ。

未知数  $A, X, B$  の 1 次方程式と同じ計算で

$$X = \frac{1}{3}(B - 2A) = \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とするとき,

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (1)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & 10 \\ -8 & 4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$  の階数を求めよ。

(2) 
$$\begin{cases} 2x - y + z - 2w = -1 \\ 4x - 2y + 3z - 2w = 0 \\ -6x + 3y - z + 10w = 7 \\ -8x + 4y - 2z + 12w = 8 \end{cases}$$
 の解をすべて求めよ。

(1) と (2) は同じ方法で解けるからまとめてやる。(2) の拡大係数行列にガウスジョルダンの消去法を適用する。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 & 10 & 7 \\ -8 & 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix} \times (1/2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 & 10 & 7 \\ -8 & 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行} \times 4 \text{をひく} \\ \text{第1行} \times 6 \text{をたす} \\ \text{第1行} \times 8 \text{をたす} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{第2行} \times (1/2) \text{をひく} \\ \text{第2行} \times 2 \text{をひく} \\ \text{第2行} \times 2 \text{をひく} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0でない行が2行だから階数は2である。また対応する連立方程式は

$$\begin{cases} x - (1/2)y - 2w = -3/2 \\ z + 2w = 2 \end{cases}$$

ここで(たとえば) $y = t, w = s$ とおいて

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 2s - \frac{3}{2} \\ y = t \\ z = -2s + 2 \\ w = s \end{cases} \quad (t, s \text{ は任意の実数})$$

がすべての解である。このような解の表示方法は一通りではない。違う表示方法もあり得る。必ず検算しておくこと。

3. (1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

検算:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを確かめよ。

(2)  $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ y + z = t \end{cases}$  の解  $(x, y, z)$  を  $t$  で表せ。

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - 4t \\ -1 + 5t \\ 1 - 3t \end{pmatrix}$$

(3) (2) の解が  $x + y + z = 0$  となるように  $t$  を決めよ。

$$x + y + z = \frac{1}{2}((2 - 4t) + (-1 + 5t) + (1 - 3t)) = 1 - t$$

だから

$$t = 1$$