本日やること

1. ベクトル解析
   - 場の解析

ベクトル解析
場の解析

スカラー場の勾配

スカラー場 $\mathrm{P} \mapsto f(P)$ は P の座標 (x, y, z) を使うと 3 変数関数とみなせるので x, y, z で偏微分ができる.

$$\mathrm{P}(x, y, z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

で決まるベクトル場をスカラー場 f の勾配 (gradient) と呼び

$$\operatorname{grad} f, \quad \operatorname{grad} f(\mathrm{P}), \quad \operatorname{grad} f(x, y, z)$$

などの記号で表す.

ベクトル解析

場の解析

ハミルトン演算子と勾配

形式的記号

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

をハミルトン (Hamilton) 演算子またはナブラ (nabla) と呼ぶ.
これらを用いると $\mathrm{grad} f$ は

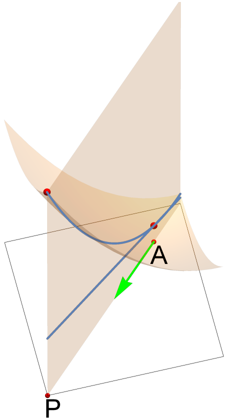
$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \nabla f$$

とかける。

ベクトル解析

復習：方向微分

復習：2 変数関数の方向微分係数の定義



$z = f(x, y)$: 2 変数関数
A(a, b) : xy 平面の定点.
$\vec{u}$: xy 平面の大きさ 1 のベクトル.
動点 P(x, y) を A から $\vec{u}$ 方向に動かすと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{u}, \quad s \text{ は実数のパラメータ}$$

と表される.

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{s}$$

が存在するとき $f(x, y)$ の**点 A(a, b) における $\vec{u}$ 方向微分係数**と呼ぶ. (ただし, $f(\mathrm{P})$, $f(\mathrm{A})$ はそれぞれ $f(x, y)$, $f(a, b)$ を意味する.)

ベクトル解析

復習：方向微分

復習：2 変数関数の方向微分可能性・方向微分係数の表示

$\vec{u}$ を大きさ 1 のベクトルとする。

(i) $f(x, y)$ が偏微分可能で，偏導関数が連続ならば点 A(a, b) における $\vec{u}$ 方向微分係数は存在する。

(ii) $\boldsymbol{u}$ の成分表示を $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ とすると

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{s} = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

である.

このことは 3 変数関数 $f(x, y, z)$，空間のスカラー場 $f(\mathrm{P})$ についても成り立つ。

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の方向微分

スカラー場 f の $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向微分係数を

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathsf{P}) - f(\mathsf{P}_0)}{s}$$

で定める．ただし

$\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$：単位ベクトル.

s：実数のパラメータ

$\mathsf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathsf{P}(x, y, z)$ は　$\overrightarrow{\mathsf{P}_0\mathsf{P}} = s\vec{\boldsymbol{u}}$ をみたす.

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の方向微分と勾配

(i) スカラー場 $f(P)$ が $(x, y, z$ の関数とみて) 偏微分可能, かつ各偏導関数が連続であるとき, ベクトル $\vec{u}$ 方向の方向微分は存在して

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \cdots (\star)$$

に等しい.

(ii) $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ は, $\vec{\boldsymbol{u}}$ を $|\vec{\boldsymbol{u}}| = 1$ を満たしながら変化させたとき,

① 向きは f の P_0 における方向微分係数 $(\star)$ が最大になる $\vec{u}$ の向き

② 大きさはその時の方向微分係数の値

であるようなベクトルである。

このことは $\mathrm{grad}\, f$ が座標系に依存しないことも示している.

ベクトル解析

場の解析

[確かめ] (i) は 2 変数の場合と同じ。(ii) は

$$\vec{u} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) = |\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)| \cos\theta \quad (\theta \text{は } \vec{u} \text{ と } \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \text{ のなす角})$$

だから $(\star)$ は $\vec{u}$ と $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ が同じ向きのとき最大値 $|\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)|$ をとるから明らか.

ベクトル解析

場の解析

保存場とスカラーポテンシャル

$\vec{A}$：ベクトル場，　f：スカラー場　が

$$\vec{A} = -\mathrm{grad}\, f$$

をみたすとき，

$\vec{A}$ は保存場である

f は $\vec{A}$ のスカラーポテンシャルである

という。

ベクトル解析

場の解析

例　クーロン場のポテンシャル

スカラー場

$$f(x, y, z) = \frac{1}{r}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

はベクトル場

$$\vec{A} = \frac{(x, y, z)}{r^3}$$

のスカラーポテンシャルである。

ベクトル解析

場の解析

[確かめ]

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\left(\frac{1}{r}\right)_x, \left(\frac{1}{r}\right)_y, \left(\frac{1}{r}\right)_z \right)$$

であるが $r_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$

$\left(\dfrac{1}{r}\right)_x = \left(\dfrac{1}{r}\right)_r r_x = -\dfrac{r_x}{r^2} = -\dfrac{x}{r^3}$ **同様に** $\left(\dfrac{1}{r}\right)_y = -\dfrac{y}{r^3}, \left(\dfrac{1}{r}\right)_z = -\dfrac{z}{r^3},$

だから

$$-\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{(x,y,z)}{r^3} = \vec{\boldsymbol{A}}$$

ベクトル解析

場の解析

復習：2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

だから同様に (P の座標を (x, y, z) として)

ベクトル場 $f(\mathrm{P})$ が x, y, z で偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$: t で微分可能

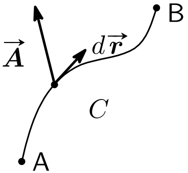
$\Longrightarrow$ 合成関数 $f(x(t), y(t), z(t))$ も微分可能で

$$f(P)_t = x_t f(P)_x + y_t f(P)_y + z_t f(P)_z \quad \cdots (\star\star)$$

ベクトル解析

場の解析

保存場の線積分



$\vec{\boldsymbol{A}} = -\mathrm{grad}\, f$,

C : 点 A から点 B に向き付けられた曲線

$$\Rightarrow \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = f(A) - f(B)$$

(積分は途中経路によらない！！)

[確かめ] C : $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$, $a \leqq t \leqq b$, 正のパラメータ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$

$$\text{左辺} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}\, dt = -\int_a^b \mathrm{grad}\, f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\, dt$$

$$= -\int_a^b \left(f(\vec{\boldsymbol{r}})_x x'(t) + f(\vec{\boldsymbol{r}})_y y'(t) + f(\vec{\boldsymbol{r}})_z z'(t)\right) dt$$

$$= -\int_a^b \frac{df(\vec{\boldsymbol{r}}(t))}{dt}\, dt = -\Big[f(\vec{\boldsymbol{r}}(t))\Big]_a^b = \text{右辺}$$

($F(P)$ を $F(\vec{\boldsymbol{r}})$ などと書いた)

ベクトル解析

場の解析

ベクトル場の発散

ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = (A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z))$ に対して

スカラー場 $\dfrac{\partial A_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)$

を $\vec{\boldsymbol{A}}$ の発散 (divergence) という。

記号 div$\vec{\boldsymbol{A}}$, $\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{A}}, \cdots$ であらわす。

ベクトル解析

場の解析

[例：クーロン場の発散]

$$\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \frac{(x, y, z)}{r^3} \text{ のとき}$$

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \begin{cases} 0, & (\mathrm{P} \neq \mathrm{O}) \\ \text{定義できない}, & (\mathrm{P} = \mathrm{O}) \end{cases}$$

ベクトル解析

場の解析

[div$\vec{A}$ の本質：点 P での湧き出し率]
点 P を含み, 座標軸に平行な辺をもつような立方体 E をとるとき,

$$\frac{1}{V(E)}\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS \longrightarrow \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P)$$

$\longrightarrow$ は E を 1 点 P に縮めていったときの極限,
S は E の表面に外向きに向きを付けたもの,
$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトル,
$V(E)$ は E の体積.

ベクトル解析

場の解析

ガウスの発散定理

G を空間の有界閉領域, S を G の表面に外向きに向き付けたもの, $\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトルとし $\boldsymbol{A} = (x, y, z)$ を連続微分可能なベクトル場とする. このとき

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_G \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, dxdydz$$

が成り立つ.