本日やること

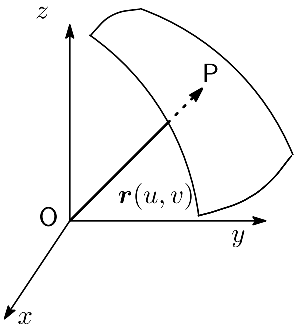
1. ベクトル解析
   - 曲面と面積分

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面のパラメータ表示

曲面のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)$ を連続な 2 変数ベクトル値関数とするとき

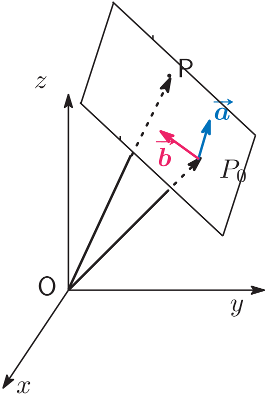
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \cdots (\star)$$

を満たす点 P の軌跡は連続な曲面になる．これを利用して曲面を表す方法を，u，v をパラメータとする曲面のパラメータ表示という．
以後，曲面は $(\star)$ のようにパラメータ表示されているものとする。

ベクトル解析

曲面と面積分

[例：平面]



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_0 + u\vec{\boldsymbol{a}} + v\vec{\boldsymbol{b}}$$

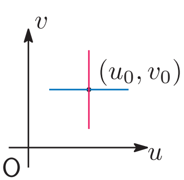
を満たす点 P の軌跡は P_0 をとおり $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ で張られる平面。

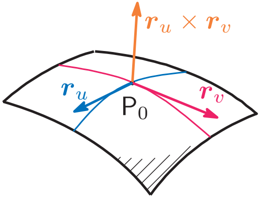
$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ を方向ベクトルという。

ベクトル解析

曲面と面積分

接ベクトル





u 曲線 : 変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡
v 曲線 : 変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

また, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v_0)$ とするとき, $\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$, $\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{\mathbf{0}}$ でないならば

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル
$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

ベクトル解析

曲面と面積分

接平面・法ベクトル

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$, $\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば，点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。以後 $\vec{r}$ はこの性質を持つと仮定する。

また外積

$$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に垂直であるが，これと同方向のベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという．

ベクトル解析
曲面と面積分

曲面積の定義

D は u, v 平面の面積確定な有界閉領域, 曲面 S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v) \qquad ((u, v) \in D)$$

でパラメータ表示されるとき

$$S \text{ の面積} = \iint_D |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

と定める.

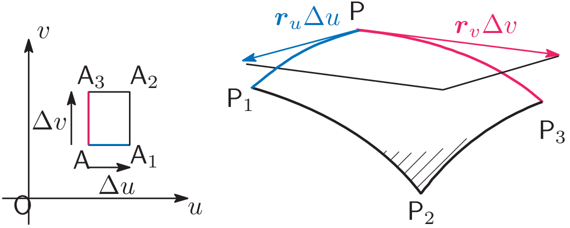
$$dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

を面積要素と呼ぶ.

ベクトル解析

曲面と面積分

[考え方]　u, v が小さい長方形領域 $\mathrm{AA_1A_2A_3}$ を動くとき, 対応する曲面の小部分 $\mathrm{PP_1P_2P_3}$ の面積 ΔS は



$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u+\Delta u, v) - \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \fallingdotseq \vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v)\Delta u,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PP_3}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v+\Delta v) - \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \fallingdotseq \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)\Delta v$$

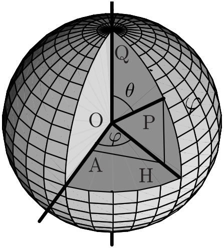
$$\Delta S \fallingdotseq |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v)\Delta u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)\Delta v| = |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)|\Delta u \Delta v$$

のように近似されるから.

ベクトル解析

曲面と面積分

球面と球面座標



S を 原点中心, 半径 a の球面とするとき, P$\in S$ の直交座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

と表される。ただし P(x, y, z), H$(x, y, 0)$, A$(x, 0, 0)$, Q$(0, 0, a)$ とするとき

$$\angle\mathrm{QOP} = \theta, \quad \angle\mathrm{AOH} = \varphi$$

である。これを球面座標表示という.

ベクトル解析

曲面と面積分

面積分

スカラー場の面積分の定義

スカラー場 P $\mapsto f(\mathsf{P})$ の曲面 S 上の面積分を

$$\iint_S f(\mathsf{P})\,dS = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k)\varDelta S_k$$

で定める．ただし，

$\varDelta S_k$ $(k = 1, \ldots, n)$: S を分割した小曲面 (およびその面積),
$\mathsf{P}_k \in \varDelta S_k$,
$\lim$ は分割を細かくする極限

S が平面領域の時は 2 重積分，$f(P) \equiv 1$ のときは S の曲面積になる。

ベクトル解析
曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のスカラー場の面積分

曲面 S が

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \qquad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{\boldsymbol{r}}(u,v))|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|\,dudv$$

$\{\Delta D_k\}$:D の長方形分割, $\{\Delta S_k\}$:対応する S の分割, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_k,v_k)$ とすると

$$\Delta S_k \fallingdotseq |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)|m(D_k)$$

$$\text{左辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k)|\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)|m(D_k) = \text{右辺}$$

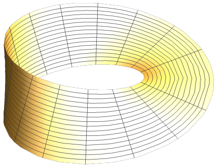
となるからである.

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面の向き付け

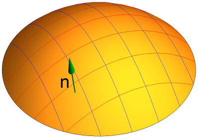
曲面に裏表を付けることを曲面の向き付けという。
S の各点 P に表方向の単位法線ベクトル $\vec{n}(\mathrm{P})$ を対応させ, 正の向きの単位法線ベクトル とよぶ。(S 上のベクトル場となる)
$\vec{n}(\mathrm{P})$ が S の全域で連続に定義できるとき, 曲線は向き付け可能であるという。
各点 P で $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ と $\vec{n}$ が同じ向きとなるようなパラメータ (u, v) を正の向きのパラメータと呼ぶ.
今後は, 曲面はすべて向き付けられているものとし, パラメータはすべて正の向きのものとする.



ベクトル解析

曲面と面積分

ベクトル場の面積分の定義



S : 向き付けられた局面
$\vec{\boldsymbol{n}}$: 正の単位法ベクトル
$\vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$: ベクトル場
に対して $\vec{A}$ の S 上面積分を

$$\iint_S \boldsymbol{A} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \lim \sum_{k=0}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P}_k) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}(\mathsf{P}_k)\, \Delta S_k$$

で定める.
ΔS_k, P_k, lim スカラー場の面積分の場合と同じ

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のベクトル場の面積分

曲面 S が 正の向きのパラメータによって

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_D \vec{A} \bullet (\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v)\, dudv$$

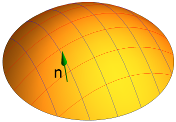
$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v}{|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|}, \quad dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| dudv$$

と表されるからあきらかである.

ベクトル解析

曲面と面積分

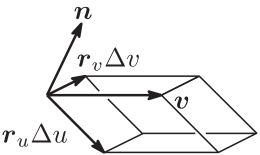
曲面を横切る流量



$\vec{v}$ を 流体の速度ベクトル とするとき

$$F = \iint_S \vec{v} \bullet \vec{n}\, dS$$

は単位時間に S を横切ってわき出す流体の総量



$$S : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(u, v) \qquad ((u, v) \in D)$$

とすると S の微小部分は $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$ で張られる平行四辺形で近似されるから，この部分を単位時間に横切る流体の総量は

$$\Delta V = \vec{v} \bullet \vec{n} = \vec{v} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv$$