本日やること

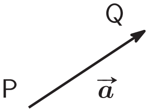
1. ベクトル解析
   - ベクトルの復習
   - ベクトル関数の微積分
   - 曲線と線積分

ベクトル解析

ベクトルの復習

ベクトルの復習

[ベクトル]

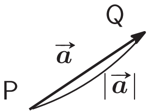


P : 始点

Q : 終点

平行移動して重なる有向線分は同じベクトルを表す

[ベクトルの大きさ]



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

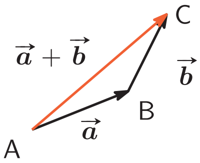
$|\vec{a}| = \overline{\mathrm{PQ}}$

[単位ベクトル] : 大きさ 1 のベクトル

[0 ベクトル] $\vec{0}$: 大きさ 0 のベクトル

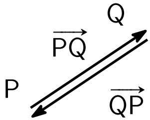
ベクトル解析
ベクトルの復習

[ベクトルの和]



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
のとき
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

[逆ベクトル]



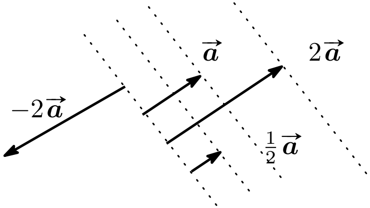
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の逆ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ で定め $-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表す

[ベクトルの差]：　$\vec{a}+(-\vec{b})$ を $\vec{a}-\vec{b}$ と書くことにする

ベクトル解析
ベクトルの復習

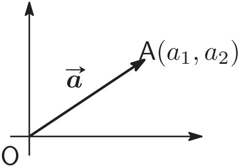
[ベクトルのスカラー倍] m : 実数 (スカラー), $\vec{\boldsymbol{a}}$: ベクトル のとき

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と同じ向きのベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{\mathbf{0}} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と反対向きのベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



ベクトル解析
ベクトルの復習

[ベクトルの成分表示]
平面の場合

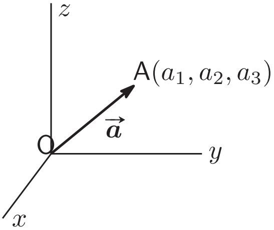


$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$,　$\mathrm{A}(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

と表す.

空間の場合



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$,　$\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

と表す.

どちらの場合も $\vec{a}$ を 点 A の位置ベクトルとよぶ。

ベクトル解析
ベクトルの復習

[ベクトルの成分による計算]

平面の場合：$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$,　$\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2)$ **のとき**

$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2)$　(m **はスカラー**)

空間の場合：$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$,　$\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ **のとき**

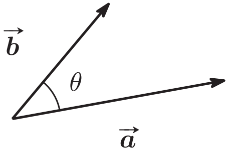
$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2, ma_3)$　(m **はスカラー**)

ベクトル解析
ベクトルの復習

[内積の定義]



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき内積 $\vec{a}\bullet\vec{b}$ を

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}\text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定める。

平面の場合も空間の場合も同じ定義である

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

ベクトル解析
ベクトルの復習

[内積の成分表示]

平面の場合　$\vec{a} = (a_1, a_2),\ \vec{b} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

空間の場合　$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

どちらの場合も　$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$

ベクトル解析

ベクトルの復習

空間のベクトルの外積の定義

$\vec{a}$, $\vec{b}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) $|\vec{c}| =$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 $(= S$ とおく$)$

(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\vec{c}$ がただ一つある。この $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積といい

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次従属ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。

ベクトル解析
ベクトルの復習

外積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

ベクトル解析

ベクトルの復習

[確かめ]

$\vec{\boldsymbol{c}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ とおくと $\vec{\boldsymbol{c}}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを示す。

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

だから $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$. 同様に $\vec{\boldsymbol{b}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$.

$$|\vec{\boldsymbol{c}}|^2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \ \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}} \text{ の張る平行六面体の体積} = |\vec{\boldsymbol{c}}|S$$

だから $|\vec{\boldsymbol{c}}| = S$ かつ $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\}$ は右手系.

ベクトル解析
ベクトル関数の微積分

ベクトル関数の微積分

[1 変数ベクトル関数]

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \text{ベクトル} \\ t & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(t) \end{array} :$$

動点の位置ベクトル，速度ベクトル，加速度ベクトル，曲線のパラメータ表示で現れる。

[2 変数ベクトル関数]

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \text{ベクトル} \\ (t,s) & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(t,s) \end{array} :$$

曲面のパラメータ表示で現れる。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の成分表示

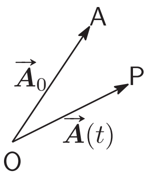
$$\vec{A}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \text{平面の場合}$$
$$= (x(t), y(t), z(t)) \qquad \text{空間の場合}$$

各成分は t の関数となる。 以後主に空間の場合を述べる。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の極限の定義



$\lim_{t\to t_0} \mathrm{AP} = 0$ のとき $\lim_{t\to t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}_0$ と定める。

実は $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ として

$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$, $\lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$

と同値。

1 変数ベクトル関数の連続性の定義

$\vec{A}(t)$ が点 t_0 で連続 $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}(t_0)$

$\vec{A}(t)$ が区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ I の各点で連続

実は各成分関数 $x(t), y(t), z(t)$ が連続であることと同値。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}(t)} \text{ が } t_0 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(t_0 + \Delta t) - \overrightarrow{\boldsymbol{A}}(t_0)}{\Delta t} \cdots (\star) \text{ が存在}$$

$(\star)$ を t_0 における微分係数ベクトルといい

記号： $\dfrac{d\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}{dt}(t_0),\quad \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{A}}}(t_0), \cdots$

で表す

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が t_0 で微分可能 $\iff$ $x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 成分ごとに微分すればよい。

[確かめ]
$$\frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_o)}{\Delta t}$$
$$= \frac{(x(t_0 + \Delta t) - x(t_o), y(t_o + \Delta t) - y(t_o), z(t_o + \Delta t) - z(t_o))}{\Delta t}$$
$$= \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_o)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_o)}{\Delta t}, \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_o)}{\Delta t} \right)$$
$$\to (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \dot{\vec{A}}(t)$: $\vec{A}(t)$ の導関数ベクトル

導関数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

ベクトル解析

2 変数ベクトル関数の微積分

[2 変数ベクトル関数]
2 変数ベクトル値関数 $\vec{A}(u,v)$ に対しても 2 変数の実数値関数と同様に極限, 連続性, 偏導関数を定める.

[成分表示]

$$\vec{A}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

極限・連続性・偏微分可能性は 1 変数の時と同様に定める。
[偏導関数]

$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{A}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right),\ \frac{\partial}{\partial v}\vec{A}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

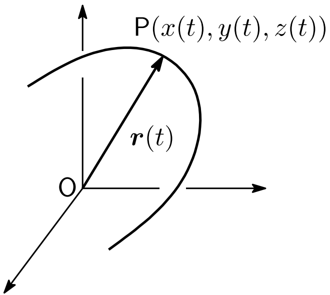
記号 $\vec{A}_u$, $\vec{A}_v$ を用いることもある.

ベクトル解析

曲線と線積分

曲線のパラメータ表示

曲線のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$: 連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (\star)$$

を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

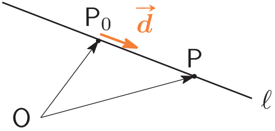
$(\star)$ を曲線 C のパラメータ表示といい, t をパラメータという。

ベクトル解析
曲線と線積分

[例] 点 P_0 を通り，ベクトル $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ に平行な直線 ℓ のパラメータ表示は

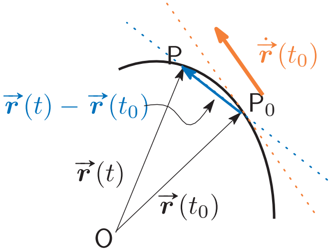
$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\vec{\boldsymbol{d}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\vec{\boldsymbol{d}}$ を方向ベクトルという



ベクトル解析
曲線と線積分

接ベクトルの定義



$\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) を, P_0 における C の接ベクトルという.

[考え方]　$t \to t_0$ とすると $\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$ となるので直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}}{t-t_0}$$

だから $\dot{\vec{r}}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

ベクトル解析

曲線と線積分

曲線の長さ

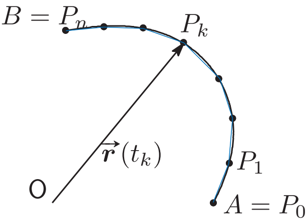
曲線 C の分点を

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$$

とするとき C の長さ L を

$$L = \lim \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$$

と定める. $\lim$ は分点の間隔を細かくする極限。



ベクトル解析
曲線と線積分

曲線の長さのパラメータによる計算

C のパラメータ表示を

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

とする。ただし $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ は微分可能, $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ は連続で $\boldsymbol{0}$ にならないものとする。以後 常にこれが成り立つものと仮定する． このとき

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

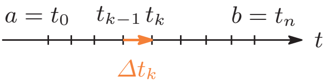
である．成分表示 $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を使うと

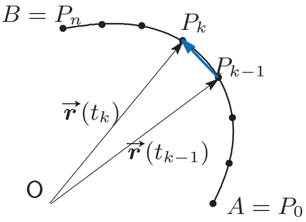
$$= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{r}(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left|\frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_k)\right| \Delta t_k$$

$$L \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_k)\right| \Delta t_k \to \int_a^b \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

弧長パラメータの定義

$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t), \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$ のとき

$$s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\tau} \right| d\tau = \begin{cases} \text{曲線 AP の長さ} & (t > t_0 \text{のとき}) \\ -\text{曲線 AP の長さ} & (t < t_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

で決まる s を弧長パラメータという。

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| \text{ だから } ds = \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt \quad \text{(線要素とよぶ)}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} \text{ だから } d\vec{\boldsymbol{r}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\, dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

線積分

[スカラー場]

$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & f(\mathrm{P}) \end{array}$$

電位，電荷密度などで現れる。

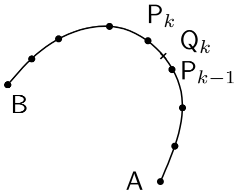
[ベクトル場]

$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \text{ベクトル} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \vec{A}(\mathrm{P}) \end{array}$$

電磁場，流体の速度場などで現れる。

ベクトル解析
曲線と線積分

スカラー場の線積分の定義



曲線 C 上の, スカラー場 $\mathsf{P} \mapsto f(\mathsf{P})$ の線積分を

$$\int_C f(\mathsf{P})\,ds = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{Q}_k)\,\overset{\frown}{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k}$$

で定める。ただし

$\mathsf{A} = \mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n = \mathsf{B}$: C の分点,
Q_k : C の P_{k-1} から P_k までの部分に含まれる点
$\overset{\frown}{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k}$: P_{k-1} から P_k までの弧長.
$\lim$ は分割を細かくする極限

スカラー場 の線積分は, 区間 $[a, b]$ 上の関数の定積分を曲線上に拡張したもの。
(ただし $a < b$ とする。)

ベクトル解析

曲線と線積分

パラメータ表示によるスカラー場の線積分の計算

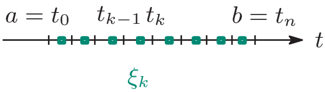
$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

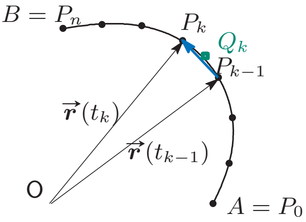
$$\Rightarrow \quad \int_C f(\mathrm{P})\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_k), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると $f(P) = f(\vec{\boldsymbol{r}}(t))$ と書いて

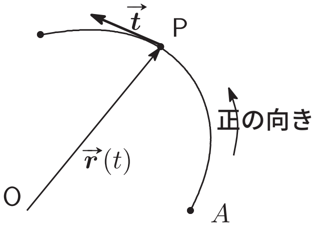
$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \fallingdotseq |\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t_k) - \vec{\boldsymbol{r}}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[曲線の向き付け]



曲線
$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$
に向きを付ける。

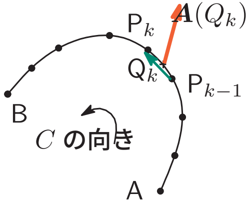
この向きと, t が増加するとき P の動く向きが一致するとき, t を正のパラメータという。

$$\vec{\boldsymbol{t}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \div \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right|$$

を正の単位接ベクトルという。以後 t は正のパラメータとする。

ベクトル解析
曲線と線積分

ベクトル場の線積分の定義



曲線 C 上の，ベクトル場 $\mathsf{P} \mapsto \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$ の線積分を

$$\int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k} \quad \cdots (\star)$$

で定める。(記号はスカラー場の場合と同じ)

ベクトル解析
曲線と線積分

パラメータ表示によるベクトル場の線積分の計算

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,\ \text{正のパラメータ}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\,dt = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\,ds$$

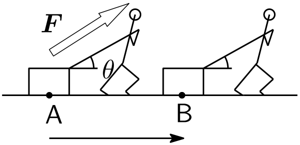
[確かめ]　前と同じ記号で

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}_k}{\Delta t_k}\Delta t_k \fallingdotseq \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k,\quad \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Q}_k) = \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)})$$

$$(\star)\ \text{の右辺} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k \to \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

ベクトル解析
曲線と線積分

[力の場での仕事]　空間の点 P に対して力 $\vec{F}$(P) が決まるとき, $\vec{F}$(P) を力の場という. 力の場 $\vec{F}$ の中で曲線 C に沿って物体を移動させるとき, $\vec{F}$ のする仕事 W を定める.



$\vec{F}$: 定ベクトル. C : 線分 AB (A から B へ向き付ける) の場合。
$\vec{F}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を θ とするとき

$$W = |\vec{F}|\,\mathrm{AB}\,\cos\theta = \vec{F} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

一般の場合。C を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_n$ で近似して各線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ 上では $\vec{F}$(P) は 定ベクトル $\vec{F}(\mathrm{Q}_k)$ で近似して, W を

.

$$W = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(\mathrm{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

と定める.