本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 置換積分法
     - 極座標の場合
     - 一般の変数変換の場合

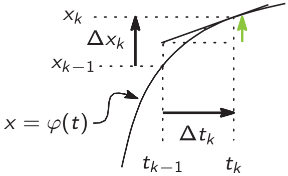
置換積分法

復習：定積分の場合

定積分の置換積分

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

[確かめ]



$\lim \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ だから $\Delta x \fallingdotseq \dfrac{dx}{dt}\Delta t$

$$\sum_k f(x_k)\Delta x_k \fallingdotseq \sum_k f(\varphi(t_k))\frac{dx}{dt}\Delta t$$

$\downarrow$ 左辺　　$\downarrow$ 右辺

置換積分法

極座標変換の場合

極座標変換による置換積分法

D : 面積をもつ有界閉領域　$f(x,y)$: 連続関数　とするとき

$$(\star)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

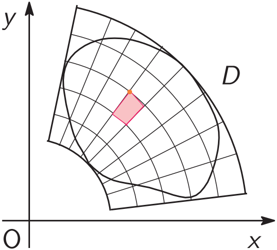
ただし

$$\Omega = \{\,(r,\theta);\ r \geqq 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi \quad (x,y) \in D\}$$

: $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D$ となるような (r,θ) の集合

置換積分法

極座標変換の場合



$$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ r_{j-1} \leqq r \leqq r_j, \theta_{k-1} \leqq \theta \leqq \theta_k\}$$

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1},$$

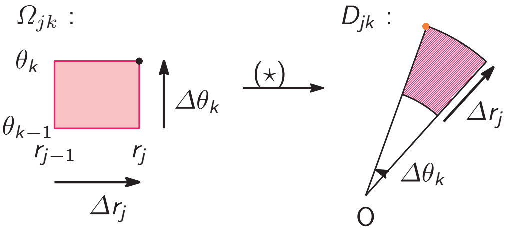
$$\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1},$$

$$\mathrm{P}_{jk}(r_j\cos\theta_k, r_j\sin\theta_k) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, m$$

置換積分法

極座標変換の場合



$$m(D_{jk}) = r_j \Delta r_j \Delta\theta_k - \frac{1}{2}(\Delta r_j)^2 \Delta\theta_k \fallingdotseq r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

$$\sum_{j,k} f(\mathrm{P}_{jk})\, m(D_{jk}) \fallingdotseq \sum_{j,k} f(r_j \cos\theta_k, r_j \sin\theta_k)\, r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

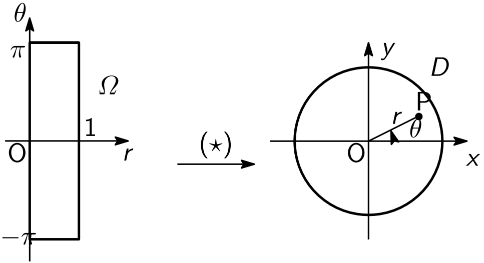
$\downarrow$ 左辺　　　　$\downarrow$ 右辺

置換積分法

例題 9.4.1

$$I = \iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dxdy \quad D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

[解]



$\mathrm{P}(x, y) \in D \ \Leftrightarrow\ 0 \leqq r \leqq 1$ より

$\Omega = \{(r, \theta);\ 0 \leqq r \leqq 1,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$

極座標変換　(⋆) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

により

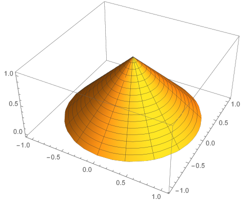
$1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r, \quad dx\, dy = r\, dr\, d\theta$ だから

置換積分法

例題 9.4.1

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} (1 - r)\, r dr d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (1 - r) r dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6}\, d\theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

である. □



置換積分法

一般の変数変換の場合

一般の変数変換による置換積分法

D : 面積をもつ有界閉領域 $f(x, y)$: 連続関数 とするとき

$$(\star)\ \begin{cases} x = \varphi(u, v) & \text{連続微分可能} \\ y = \psi(u, v) & \text{連続微分可能} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Omega f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |J(u, v)| dudv$$

ただし

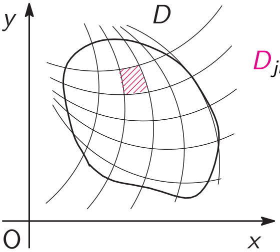
$$\Omega = \{ (u, v) ; (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D \}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$: ヤコビアン (Jacobian)

置換積分法

一般の変数変換の場合

[考え方]



$$D_{jk} = \{(\varphi(u,v), \psi(u,v))\ ;\ u_{j-1} \leqq u \leqq u_j, v_{k-1} \leqq v \leqq v_k\}$$

$$\Delta u_j = u_j - u_{j-1},$$

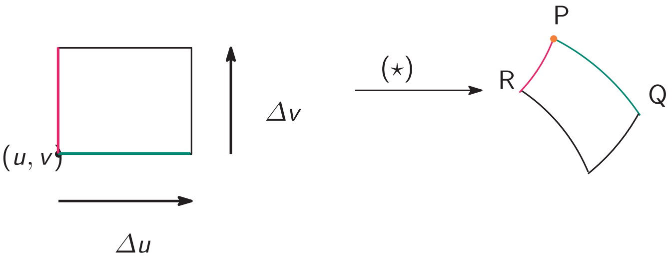
$$\Delta v_k = v_k - v_{k-1},$$

$$\mathrm{P}_{jk}(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, m$$

置換積分法

一般の変数変換の場合



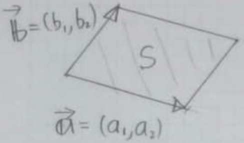
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (\varphi(u+\Delta u_j, v) - \varphi(u,v), \psi(u+\Delta u_j, v) - \psi(u,v))$$
$$\fallingdotseq (\varphi_u(u,v)\Delta u_j, \psi_u(u,v)\Delta u_j) = (\varphi_u(u,v), \psi_u(u,v))\Delta u_j$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\varphi(u+\Delta v_k, v) - \varphi(u,v), \psi(u+\Delta v_k, v) - \psi(u,v))$$
$$\fallingdotseq (\varphi_v(u,v)\Delta v_k, \psi_v(u,v)\Delta v_k) = (\varphi_v(u,v), \psi_v(u,v))\Delta v_k$$

置換積分法

一般の変数変換の場合

[考え方]

復習　行列式の図形的意味



$$\Rightarrow \quad S = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & (\vec{a}, \vec{b} \text{ が右手系のとき}) \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & (\text{左手系のとき}) \end{cases}$$

だから

$$\fallingdotseq \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_u, & \psi_u \\ \varphi_v, & \psi_v \end{vmatrix}}_{= J} \right| \Delta u_j \Delta v_k$$