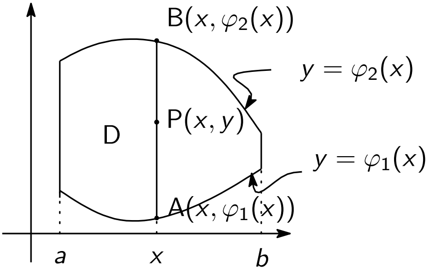
本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 平面の領域
     - 縦線集合・横線集合
   - 2 重積分
     - 定義
   - 2 重積分の基本的性質
   - 累次積分

平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合



連続関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

によって

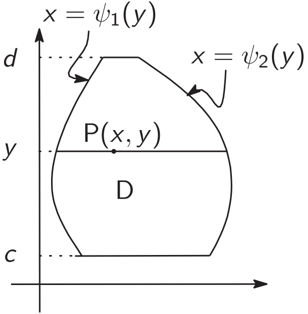
$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

のように表示される領域を縦線集合という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



連続関数　$\psi_1(x),\ \psi_2(x)$
によって

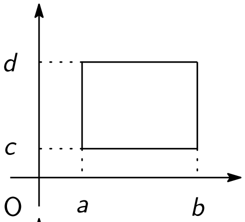
$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

のように表示される領域を横線集合という。

平面の領域

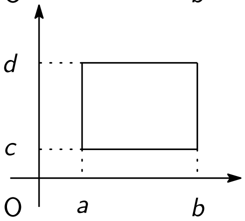
縦線集合・横線集合

例　長方形領域



縦線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$



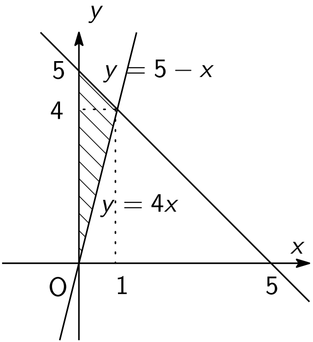
横線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ a \leqq x \leqq b\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

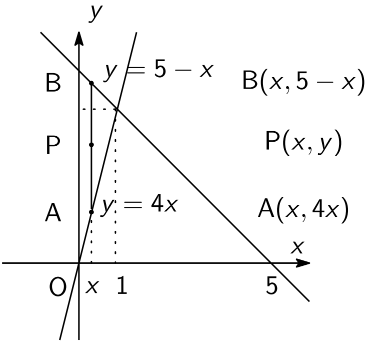
[例題 9.1.2]



平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合で表すと

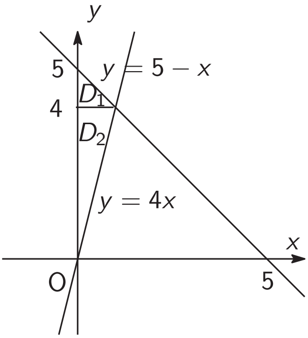


$D =$
$\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 4x \leqq y \leqq 5 - x\}$

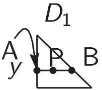
平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合で表すと



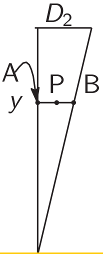
$D = D_1 \cup D_2$



$y = 5 - x \iff x = 5 - y$ に注意して

A$(0, y)$ P(x, y) B$(5 - y, y)$

$D_1 =$
$\{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq 5 - y\}$



$y = 4x \iff x = \frac{y}{4}$ に注意して

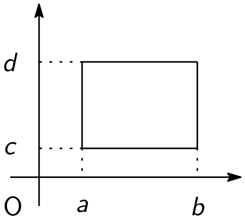
A$(0, y)$ P(x, y) B$(\frac{y}{4}, y)$

$D_2 =$
$\{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq \frac{y}{4}\}$

平面の領域

面積

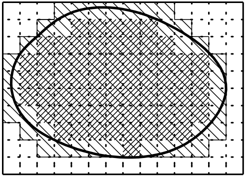
長方形の面積



$$S = (b - a)(d - c)$$

平面の領域

一般の領域の面積



s : 完全に含まれる小長方形の面積和

S : 共通部分のある小長方形の面積和

一般の領域の面積

長方形分割を限りなく細かくするとき

$$\lim(S-s)=0$$

となるとき, D は面積を持つという。このとき

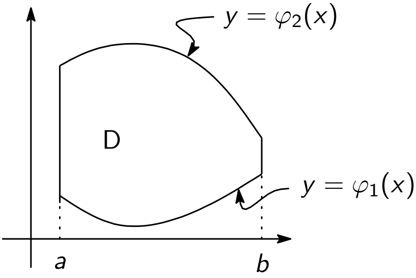
$$\lim S=\lim s$$

となるが, この量を $=m(D)$ とおき D の面積という .

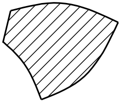
平面の領域

一般の領域の面積

[面積を持つ閉領域の例]



連続関数のグラフで囲まれた領域

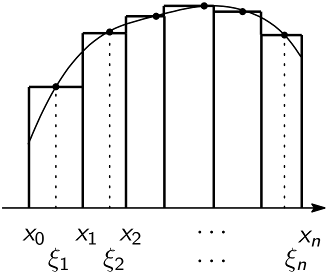


いくつかの接線を持つようになめらかな曲線で囲まれた領域

2 重積分

復習：定積分

復習　$[a, b]$ 上の $f(x)$ の定積分



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$
$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$

二重積分

積分領域の分割

$D \subset \mathbb{R}^2$：面積を持つ有界閉領域

のとき

$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ が D の分割であるとは,

(i) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$

(ii) 各 D_k は面積をもつ有界閉領域, 境界以外では互いに共通部分をもたない

であること。

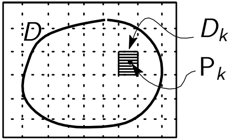
$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \max\{\mathrm{PQ} \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D_k\}$

二重積分

定義

2 重積分の定義

D : 面積をもつ有界閉領域
$f(x,y)$: D 上で定義された関数
$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$: D の分割
$\mathrm{P}_k \in D_k,\ \ k = 1, \ldots, n$



$f(x,y)$ は D 上で積分可能 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k) m(D_k) \quad (\mathcal{P}, \{\mathrm{P}_k\}\ \text{のとりかたによらず存在})$$

この極限値 $= \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, $f(x,y)$ の D 上の 2 重積分と呼ぶ

二重積分

2 重積分の基本的性質

1. 面積をもつ有界閉領域 D 上で連続な 2 変数関数は D で積分可能である.

以後、D は面積を持ち有界閉な領域, 関数は連続とする.

2. (i) $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

2. (ii) $\displaystyle\iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy$ （k は定数とする）

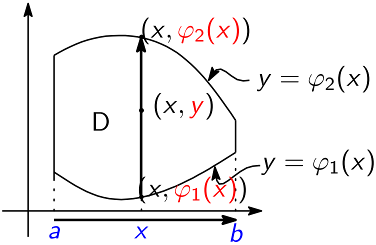
2. (iii) D 上で $f(x,y) \leqq g(x,y) \Rightarrow \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\,dxdy$

2. (iv) $D = D_1 \cup D_2$ で D_1, D_2 が境界以外では共通部分をもたないならば,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

累次積分
定義

累次積分その 1



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 連続関数

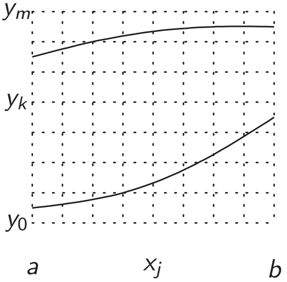
$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$　縦線集合で表示

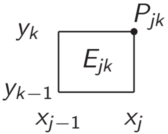
$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

累次積分

証明

[確かめ]　長方形分割で考えてよい。



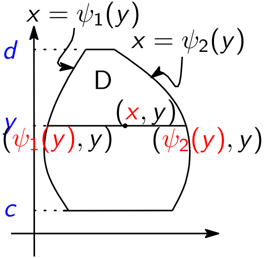


$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{j,k} f(P_{jk})m(E_{jk}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k} f(x_j, y_k)\Delta y_k \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \sum_{j=0}^{n} \left(\int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y)dy \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \text{右辺}
\end{aligned}
$$

累次積分

定義

累次積分その 2



$\psi_1(y), \psi_2(y)$: y の連続関数

$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

横線集合で表示

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy$$