本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 平面の領域
     - 領域と境界
     - 縦線集合・横線集合

再録：ガイダンス

電気のための微分積分 D

内容

(1) 2 変数関数の偏微分法, 曲面と接平面, 極値問題
(2) 2 変数関数の重積分法
　平面の領域と境界
　重積分
　累次積分と積分の変数変換
　面積・体積
(3) 線積分, 面積分ベクトル解析

評価方法

中間試験, 期末試験, 課題

平面の領域

領域と境界

1 変数関数の定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

2 変数関数の重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

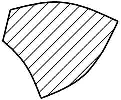
この D として許される集合は?

平面の領域

領域と境界

図形：三角形, 長方形, 円, $\cdots$

領域：「平面の, 連続な曲線で囲まれた点の集合で, 曲線上の点を含まず, 1 つにつながっているもの」



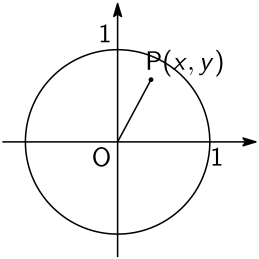
境界：領域を囲む曲線

閉領域：領域と境界をあわせたもの

有界領域：適当な円に含まれる領域

平面の領域
例

[例]　単位円の内部



$P(x, y)$: 円内の任意の点

$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$　だから

$P(x, y)$ が円周上にある

$$\Leftrightarrow \quad OP = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

$P(x, y)$ が円の内部にある

$$\Leftrightarrow \quad OP < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 1$$

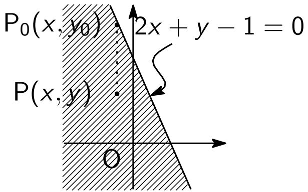
$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$: 原点中心半径 1 の円の内部である領域

$G = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$: D の境界

平面の領域

例

[例]　直線 $2x + y - 1 = 0$ の片側である領域



$P(x, y)$：この領域内の任意の点

$P_0(x, y_0)$：上下方向にある点

とすると

P_0 が直線上にある

$\Leftrightarrow \quad 2x + y_0 - 1 = 0$

P が直線の下側にある

$\Leftrightarrow \quad y < y_0$

だから

$\Leftrightarrow \quad 2x + y - 1 < 0$

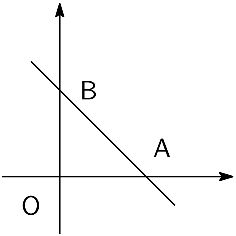
$D = \{(x, y) | 2x + y - 1 < 0\}$：直線 $2x + y - 1 = 0$ の下側にある領域

$G = \{(x, y) | 2x + y - 1 = 0\}$：$D$ の境界

平面の領域

例

[例] 原点 O, 点 A$(1,0)$, 点 B$(0,1)$ を頂点とする △OAB を境界とする閉領域 D :



$$\begin{aligned}\text{直線 OA の上側} &= \{(x,y) \mid y \geqq 0\},\\ \text{直線 OB の右側} &= \{(x,y) \mid x \geqq 0\},\\ \text{直線 AB の下側} &= \{(x,y) \mid x+y \leqq 1\}\end{aligned}$$

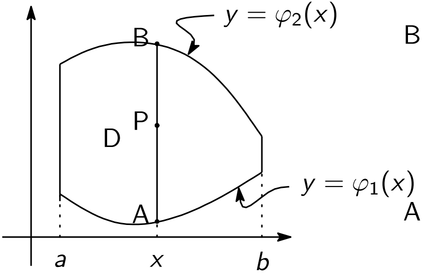
の共通部分であるから

$$D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合



$\mathrm{B}(x, \varphi_2(x))$

$\mathrm{P}(x, y)$

$\mathrm{A}(x, \varphi_1(x))$

連続関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

$a \leqq x \leqq b$

$\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$

は領域を決める。

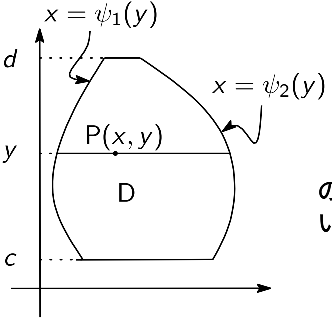
$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

のような表示法を「縦線集合による表示」という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



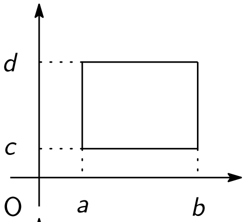
$$D = \{(x, y) \,|\, c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\}$$

のような表示法を「横線集合による表示」という。

平面の領域

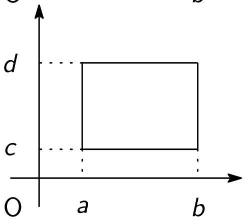
縦線集合・横線集合

例　長方形領域



縦線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$



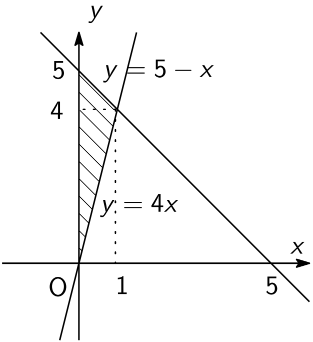
横線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ a \leqq x \leqq b\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

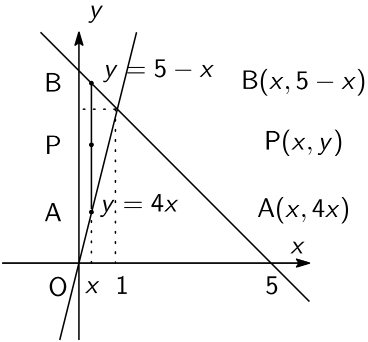
[例題 9.1.2]



平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合で表すと

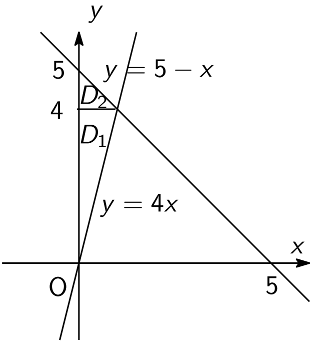


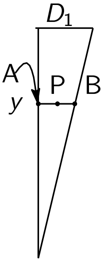
$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 4x \leqq y \leqq 5 - x\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合で表すと





$y = 4x \iff x = \frac{y}{4}$ に注意して

$\mathrm{A}(0, y)$ $\mathrm{P}(x, y)$ $\mathrm{B}(\frac{y}{4}, y)$

$D_1 =$
$\{(x, y) \,|\, 0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq \frac{y}{4}\}$

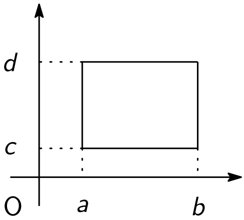
$D_2 = \{(x, y) \,|\, 4 \leqq y \leqq 5,\ 0 \leqq x \leqq 5 - y\}$

$D = D_1 \cup D_2$

平面の領域

面積

長方形の面積

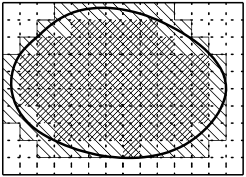


$$S = (b-a)(d-c)$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

一般の領域の面積



s : 完全に含まれる小長方形の面積和

S : 共通部分のある小長方形の面積和

面積

長方形分割を限りなく細かくするとき

$$\lim(S - s) = 0$$

となるとき, D は面積を持つという。このとき

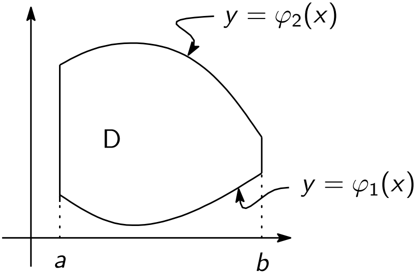
$$\lim S = \lim s$$

となるが, この量を $= m(D)$ とおき D の面積という .

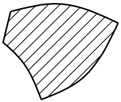
平面の領域

面積

面積を持つ閉領域の例



連続関数のグラフで囲まれた領域



いくつかの接線を持つようになめらかな曲線で囲まれた領域