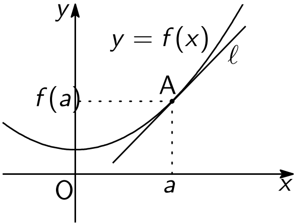
本日やること

1. 2 変数関数
    - 復習：接平面
    - 合成関数の微分法
    - 極座標

2 変数関数

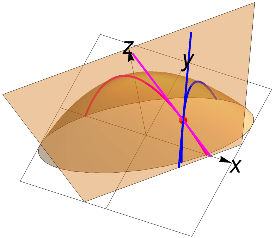
復習：接平面



1. 曲線 $y = f(x)$ において
A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾き $= f'(a)$

接線の方程式

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



2. $z = f(x, y)$ のグラフの曲面において，

A$(a, b, f(a, b))$ における
x 方向接線の傾き $= f_x(a, b)$,
y 方向接線の傾き $= f_y(a, b)$,

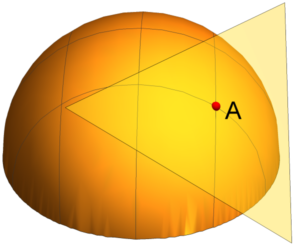
接平面の方程式

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$\cdots(\star)$$

2 変数関数

復習：接平面

[例：上半球面の接平面]



$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ (= f(x, y) \text{ とおく})$$

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z - \tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$z = \frac{-x - y + 2}{\sqrt{2}}$$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i)　$z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "t_x"] & & \\
& t \arrow[r, "z_t"] & z \\
y \arrow[ur, "t_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例]　$z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y\cos(xy)$$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "x_u"] \arrow[dr, "y_u" near start] & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ & & z \\ v \arrow[r, "y_v"'] \arrow[uur, "x_v" near start] & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]
t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}\Delta x &= \varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\\ \Delta y &= \psi(t+\Delta t)-\psi(t)\\ \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\end{aligned}$$

だけ変化する．ここで Lagrange の平均値の定理を使って方向微分と同様の議論をすると,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)\Big)+\Big(f(x, y+\Delta y)-f(x,y)\Big)\\ &= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\\ &\qquad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1\end{aligned}$$

となる数 θ_1, θ_2 がある．

2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]
この両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$
$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \to f_x(x, y) = z_x, \qquad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \to f_y(x, y) = z_y$$

となるので

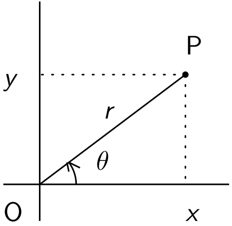
$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

2 変数関数

平面の極座標

平面の極座標



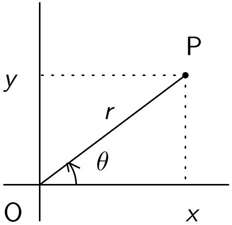
P の直交座標：(x, y)

P の極座標：(r, θ)

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 1



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だから

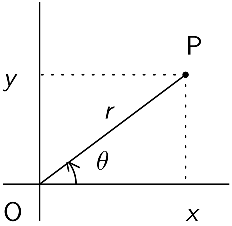
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 2



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$