

本日やること

① 2変数関数

- 復習・例
- 2変数関数の極限・連続性
- 方向微分
- 接平面
- 合成関数の微分法

2 変数関数

復習:偏導関数

x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ とは,

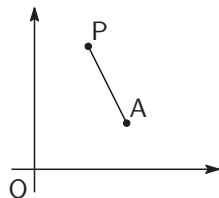
y を定数と見なして $f(x, y)$ を x のみの関数と考えて x で微分して
できる関数である。

y に関する偏導関数も同様に定める。

1 変数関数と同じ規則に従って計算できる。

2 変数関数

2 変数関数の極限・連続性



動点 $P(x, y)$ が定点 $A(a, b)$ に限りなく近づくとは 2 点の距離 AP が限りなく 0 に近づくこと。

$$P \rightarrow A, \quad (x, y) \rightarrow (a, b)$$

などで表す。

$PA = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ だから $x \rightarrow a$ かつ $y \rightarrow b$ と同じ事。

2 変数関数

2 変数関数の極限・連続性

2 変数関数の極限・連続性の定義

$P \rightarrow A$ のとき $f(x, y)$ は極限值 α に収束するとは、近づき方によらず、関数 $f(x, y)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくこと。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha, \quad f(x, y) \rightarrow \alpha \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))$$

などで表す。

関数 $f(x, y)$ が点 $A(a, b)$ で連続であるとは

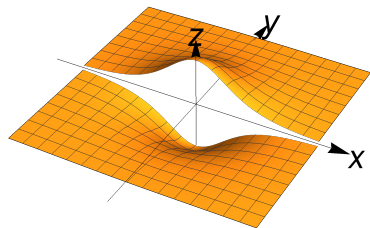
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

であること。定義域の各点で連続であるとき、単に連続であるという。

2 変数関数

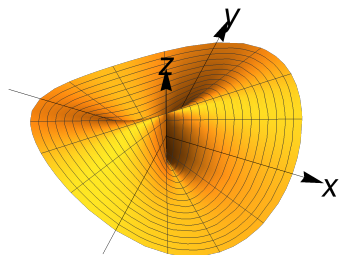
連続でない関数の例

[連続でない関数の例]



$$z = \frac{\text{sign}(y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad \text{ただし}$$

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \text{ のとき} \\ 0 & y = 0 \text{ のとき} \\ -1 & y < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

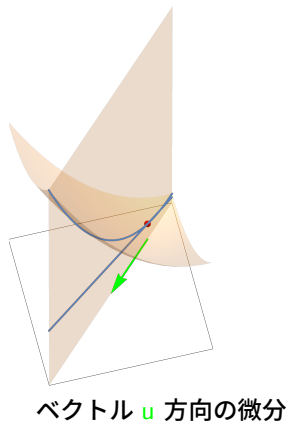
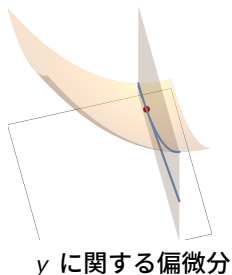
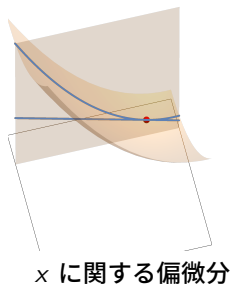


$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

2 変数関数

方向微分

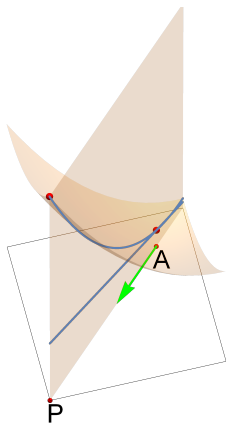
[方向微分] x 軸方向 y 軸方向だけではなくいろいろな方向の微分を考えたい。



2 変数関数

方向微分

方向微分係数の定義



$z = f(x, y)$: 2 変数関数

$A(a, b)$: xy 平面の定点.

\mathbf{u} : xy 平面の大きさ 1 のベクトル.

動点 $P(x, y)$ を A から \mathbf{u} 方向に動かすと

$$\overrightarrow{AP} = s\mathbf{u}, \quad s \text{ は実数のパラメータ}$$

と表される.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(A)}{s}$$

が存在するとき $f(x, y)$ の点 $A(a, b)$ における \mathbf{u} 方向微分係数と呼ぶ. (ただし, $f(P)$, $f(A)$ はそれぞれ $f(x, y)$, $f(a, b)$ を意味する.)

2 変数関数

方向微分

定理 8.4. 方向微分可能性・方向微分係数の表示

u を大きさ 1 のベクトルとする。

(i) $f(x, y)$ が偏微分可能で、偏導関数が連続ならば点 $A(a, b)$ における u 方向微分係数は存在する。

(ii) u の成分表示を $u = (u_1, u_2)$ とすると

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P) - f(A)}{s} = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

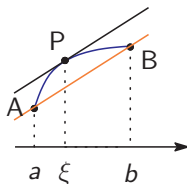
である。

以下説明する。

2 変数関数

方向微分

復習：Lagrange の平均値の定理



$f(x) : [a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (= AB \text{ の傾き}),$$
$$a < \xi < b$$

となる ξ がある。

$\xi = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$ のように θ を使って表すこともある。

2 変数関数

方向微分

[定理の確かめ]

$$\frac{f(P) - f(A)}{s} = \frac{f(x, y) - f(a, b)}{s} = \frac{f(x, y) - f(a, y)}{s} + \frac{f(a, y) - f(a, b)}{s}$$

ここで関数 $t \mapsto f(t, y)$ ($a \leq t \leq x$), $t \mapsto f(a, t)$ ($b \leq t \leq y$) にラグランジュの平均値の定理を使うと

$$f(x, y) - f(a, y) = f_x(a + \theta_1(x - a), y)(x - a), \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(a, y) - f(a, b) = f_y(a, b + \theta_2(y - b))(y - b), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

を満たす実数 θ_1, θ_2 が存在することがわかる. (θ_1, θ_2 は s に依存して決まる.)

2 変数関数

方向微分

[定理の確かめ (続き)]

$$\overrightarrow{AP} = su, \iff (x - a, y - b) = s(u_1, u_2) = (su_1, su_2)$$

だから

$$\frac{f(P) - f(A)}{s} = f_x(a + \theta_1 u_1 s, y)u_1 + f_y(a, b + \theta_2 u_2 s)u_2$$

ここで

$$s \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow a, y \rightarrow b, (a + \theta_1 u_1 s, y) \rightarrow (a, b), (a, b + \theta_2 u_2 s) \rightarrow (a, b)$$

であり, f_x, f_y が連続だから

$$f_x(a + \theta_1 u_1 s, y) \rightarrow f_x(a, b), f_y(a, b + \theta_2 u_2 s) \rightarrow f_y(a, b)$$

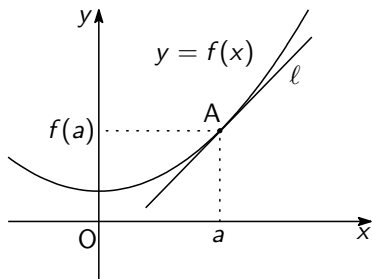
以上から

$$\frac{f(P) - f(A)}{s} \rightarrow f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$$

2 変数関数

復習：偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



$A(a, f(a))$ を通る接線 l の傾き $= f'(a)$

だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

では 2 変数関数の場合は？

2 変数関数

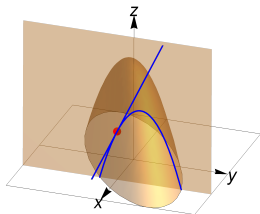
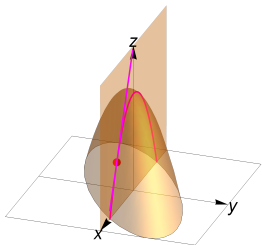
復習：偏微分係数の図形的意味

復習：偏微分係数の図形的意味

$f(x, y)$ が偏微分可能であるとき、 $z = f(x, y)$ のグラフの曲面において

$A(a, b, f(a, b))$ における x 方向接線の傾き $= f_x(a, b)$,

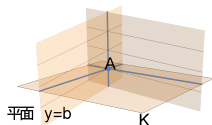
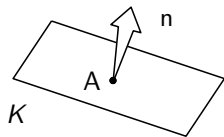
$A(a, b, f(a, b))$ における y 方向接線の傾き $= f_y(a, b)$.



2 変数関数

復習：平面の方程式

復習：平面の方程式



(i) 点 $A(a, b, c)$ を通り, ベクトル $n = (\alpha, \beta, -1)$ と垂直な平面 K の方程式は

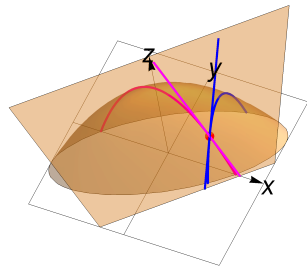
$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b) \cdots (*)$$

である.

(ii) K と平面 $y = b$ が交わってできる直線の傾き (これを x 方向傾きという) は α である. 同様に y 方向傾きは β である.

2 変数関数

接平面



$z = f(x, y)$ のグラフの曲面において,

$A(a, b, f(a, b))$ における x 方向接線,
 y 方向接線

を含む平面を作る。この平面の方程式は (第 1 回で説明したことにより)

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ \cdots (*)$$

である。

これは接平面になるか？

2 変数関数

接平面

接平面

関数 $z = f(x, y)$ が xy 平面上の点 $A(a, b)$ で偏微分可能であり、**偏導関数が連続である**とき、平面

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \cdots (*)$$

は曲面 $z = f(x, y)$ の空間の点 $A'(a, b, f(a, b))$ における接平面となる。また、ベクトル

$$\mathbf{n} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

(およびこれに 0 でない数をかけて得られるベクトル) は接平面に垂直であり、これらを曲面 $z = f(x, y)$ の法線ベクトルという。

2 変数関数

接平面

[確かめ] 平面 $(*)$ と曲面 $z = f(x, y)$ の任意の方向の方向微分係数が一致することを確かめればよい。

$$g(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

とおくこの関数のグラフは平面 $(*)$ になる。 $g_x(x, y) = f_x(a, b)$,
 $g_y(x, y) = f_y(a, b)$ だから $z = g(x, y)$ の $A(a, b)$ における $n = (n_1, n_2)$ 方向の方向微分係数は

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(P) - g(A)}{s} = g_x(a, b)u_1 + g_y(a, b)u_2 = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$$

となり、 $f(x, y)$ の方向微分係数と一致する。したがって曲面 $z = f(x, y)$ と平面 $(*)$ はあらゆる方向で接する。

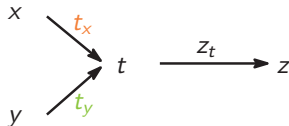
2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

- (i) $z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能
 \implies 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \quad z_y = t_y z_t$$



すでに何回も使っている。

[例] $z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ において

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y \cos(xy)$$

2 変数関数

合成関数の微分法

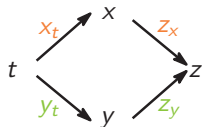
2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$: 微分可能

\implies 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (**)$$

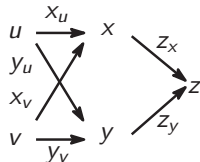


(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

\implies 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$



2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]

t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

$$\Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

だけ変化する. ここで Lagrange の平均値の定理を使って方向微分と同様の議論を
すると,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left(f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right) + \left(f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \right) \\ &= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \\ &\quad 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1\end{aligned}$$

となる数 θ_1, θ_2 がある.

2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]

この両辺を Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = x_t$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \frac{dy}{dt} = y_t$$

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \rightarrow f_x(x, y) = z_x, \quad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \rightarrow f_y(x, y) = z_y$$

となるので

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow (**) \text{ の右辺}$$

がわかる.