本日やること

1. 2 変数関数
   - 復習・例
   - 偏微分係数の図形的意味

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ とは,

y を定数と見なして $f(x, y)$ を x のみの関数と考えて x で微分して

できる関数である。

y に関する偏導関数も同様に定める。

1 変数関数と同じ規則に従って計算できる。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 5.] 重要!! 距離を表す関数

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ のとき $x^2+1=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

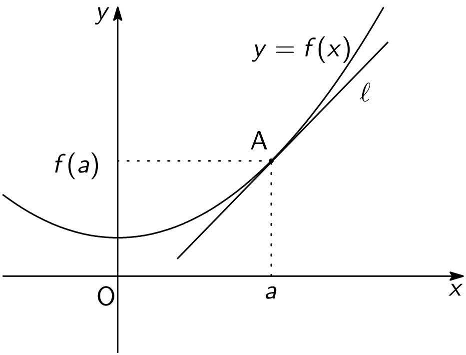
(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ のとき $x^2+y^2=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_y = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



$\mathrm{A}(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾きは $= f'(a)$

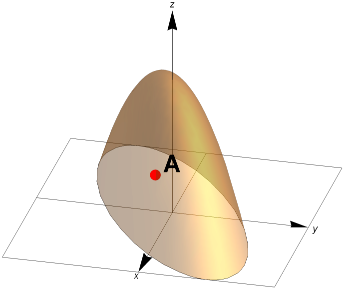
だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f'(a)$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

偏微分係数の図形的意味を $f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 2$ の場合で説明する。



$z = f(x,y) \cdots ①$ のグラフは

点 P $(x, y, f(x,y))$ (x, y は任意の実数)

をすべて集めたもの．だからグラフ上の $x = 1$, $y = 0$ である点 A の座標は

$$f(1,0) = -(1)^2 + 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 0^2 + 2 = 1$$

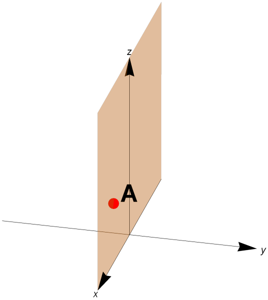
だから

$$\mathrm{A}(1,0,1)$$

$(1,0)$ における x に関する偏微分係数 $f_x(1,0)$ を図形的に調べる。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



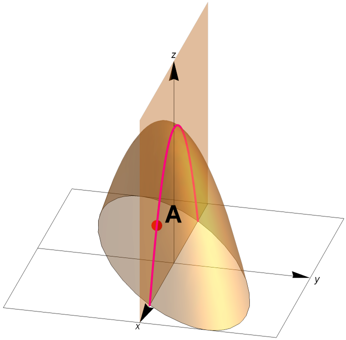
y 座標を 0 に固定した点

$$(x, 0, z),\ (x, z \text{ は任意の実数})$$

をすべて集めたものは, 図のように A を通り y 軸に垂直な平面となる。これを Px とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



①のグラフと平面 Px の共通部分は

$$z = f(x, y), \quad y = 0$$

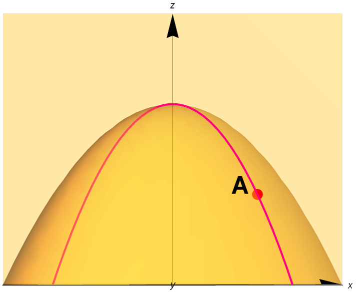
を両方満たすから

$$z = f(x, 0), \quad y = 0, \ (x \text{ は任意の実数})$$

を満たし図のような曲線となる。これを Cx とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



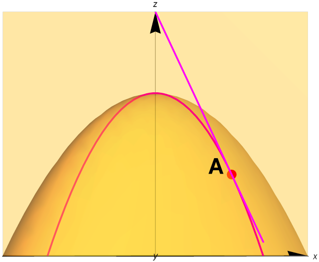
Cx を y 軸の負の方向から眺めると図のようになる。これは xz 平面で 1 変数関数

$$z = f(x, 0) = -x^2 + 2$$

のグラフになっている。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



この曲線 Cx に点 A で接線を引いてみよう。1 変数関数の考え方を使って

接線の傾き

$$= \left((-x^2+2) \text{ の } x=1 \text{ における微分係数} \right)$$
$$= (-2x)\big|_{x=1} = -2$$

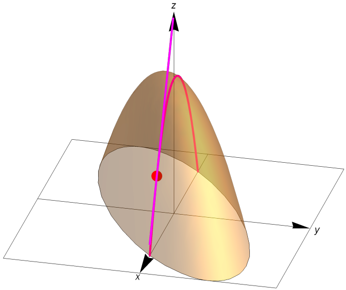
接線の方程式は

$$z = -2(x-1)+1 = -2x+1$$

これを Lx とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



Cx Lx を空間内で眺めると図のようになる。

Lx を①のグラフの A における x 方向接線とよぶ。

まとめると, x 方向接線の傾きの計算は,

(1) $z = f(x, y)$ に, 「$y = 0$ 代入」

(2) 「x で微分」

(3) 「$x = 1$ 代入」

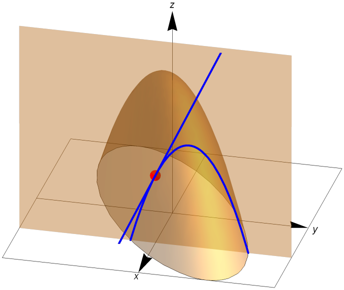
したことになるが, これは x に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$x\text{ 方向接線の傾き} = f_x(1, 0) = -2$$

であることが分かる.

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



y についても同様に

(1) $z = f(x, y)$ に，「$x = 1$ 代入」

(2) 「y で微分」

(3) 「$y = 0$ 代入」

すれば y に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$y \text{ 方向接線の傾き} = f_y(1, 0) = 2$$

であることが分かる．

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

偏微分係数の図形的意味

$f(x, y)$ が偏微分可能であるとき, $z = f(x, y)$ のグラフの曲面において

$$\mathrm{A}(a, b, f(a, b)) \text{ における } x \text{ 方向接線の傾き} = f_x(a, b),$$

$$\mathrm{A}(a, b, f(a, b)) \text{ における } y \text{ 方向接線の傾き} = f_y(a, b).$$