

本日やること

① ガイダンス

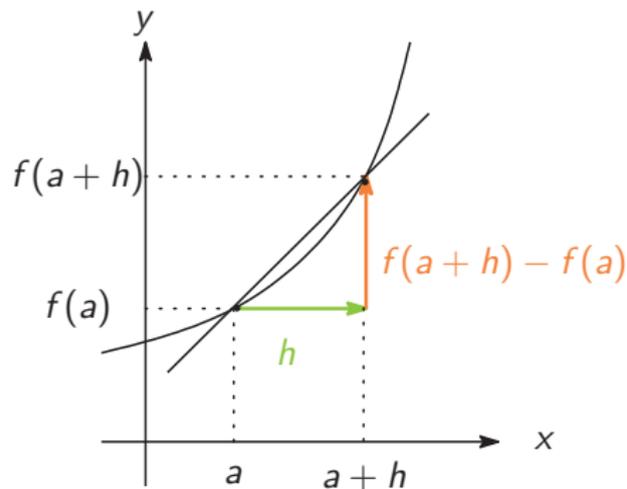
② 2変数関数

- 偏微分係数・偏導関数

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[復習：1 変数関数の微分係数]



$y = f(x)$: 1 変数関数 a : 定数のとき

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

: a における微分係数

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏微分係数の定義

$z = f(x, y)$ を 2 変数関数, $A(a, b)$ を定点とするととき, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ は点 $A(a, b)$ で x に関して偏微分可能であるとは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \dots (*)$$

が存在すること。

(*) を点 $A(a, b)$ における $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数とよび, 記号

$$f_x(a, b), \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)}, \dots$$

で表す。

y に関する偏微分係数も同様に定める。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \dots (\clubsuit)$$

と

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \dots (\star)$$

を比較すると、

(\star) は y を定数 b に固定して、 $f(x, b)$ を x のみの 1 変数関数とみて微分したものである。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏導関数の定義

- (i) 関数 $z = f(x, y)$ が集合 D の各点で偏微分可能であるとき, D で偏微分可能であるという.
- (ii) $(x, y) \in D$ に対して微分係数 $f_x(x, y)$ が決まるが, これによって決まる関数

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

を $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数と呼び, 記号

$$f_x(x, y), (f(x, y))_x, f_x, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, z_x, \frac{\partial z}{\partial x}$$

などで表す. y に関する偏導関数も同様に定める.

- (iii) 偏導関数を求めることを偏微分するという.

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1.]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき 正解は？

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + 2y ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + y + y^2 ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + y^2 ?$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1 の正解]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3 + 0.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a + 0.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき y を定数と見て x で微分して

$$f_x(x, y) = (x^2)_x + (x)_x y + (y^2)_x = 2x + y + 0.$$

(3)' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき x を定数と見て y で微分して

$$f_y(x, y) = (x^2)_y + x(y)_y + (y^2)_y = 0 + x + 2y.$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

偏微分法では、1 変数関数の微分法の計算方法がすべて使える。

[例 2.] 合成関数の微分法が使える。

合成関数の微分法を復習しよう。

記号 $f'(x)$ のかわりに $\frac{d}{dx}f(x)$ を使う。同じ意味！。

(1) $f(x) = (2x + 3)^4$ のとき $2x + 3 = t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x + 3)^4 \\ &= \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= 4t^3 \times 2 = 8(2x + 3)^3 \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

(2) $f(x, y) = (2x + 3y)^4$ のとき $2x + 3y = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= ((2x + 3y)^4)_x \\ &= (t^4)_x = (t^4)_t \times t_x \\ &= (t^4)_t \times (2x + 3y)_x = 4t^3 \times 2 = 8(2x + 3y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= ((2x + 3y)^4)_y \\ &= (t^4)_y = (t^4)_t \times t_y \\ &= (t^4)_t \times (2x + 3y)_y = 4t^3 \times 3 = 12(2x + 3y)^3 \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 3.]

(1) $f(x) = \sin(2x + 3)$ のとき $2x + 3 = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \sin t \times \frac{d}{dx} (2x + 3) = 2 \cos(2x + 3)$$

(2) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ のとき $2x + 3y = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (\sin(2x + 3y))_x = (\sin t)_x \\ &= (\sin t)_t \times t_x = (\sin t)_t \times (2x + 3y)_x = \cos t \times 2 = 2 \cos(2x + 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= (\sin(2x + 3y))_y = (\sin t)_y \\ &= (\sin t)_t \times t_y = (\sin t)_t \times (2x + 3y)_y = \cos t \times 3 = 3 \cos(2x + 3y) \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 4.] 積の微分法を使うことができる.

(1) $f(x, y) = xy \sin(2x + 3y)$ のとき 積の微分法により

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (xy)_x \sin(2x + 3y) + xy (\sin(2x + 3y))_x \\ &= y \sin(2x + 3y) + xy (2 \cos(2x + 3y)) \\ &= y \sin(2x + 3y) + 2xy \cos(2x + 3y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= (xy)_y \sin(2x + 3y) + xy (\sin(2x + 3y))_y \\ &= x \sin(2x + 3y) + xy (3 \cos(2x + 3y)) \\ &= x \sin(2x + 3y) + 3xy \cos(2x + 3y). \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 5.] **重要!!** 距離を表す関数

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ のとき $x^2 + 1 = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のとき $x^2 + y^2 = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_y = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$