本日やること

1. ガイダンス
2. 2 変数関数
   - 2 変数関数とは何か
   - 2 変数関数のグラフ
   - 平面と 1 次関数

ガイダンス

電気のための微分積分 D

内容
(1) 2 変数関数の偏微分法, 曲面と接平面, 極値問題
(2) 2 変数関数の重積分法
(3) 線積分, 面積分ベクトル解析

評価方法
中間試験, 期末試験, 課題

2 変数関数

定義

[1 変数の関数 f]

実数に対して実数を対応させる働き

$$f : x \mapsto y$$
$$y = f(x)$$

例：

$$y = x + 1,$$
$$y = x^2,$$
$$y = \sin x,$$
$$\vdots$$

[2 変数の関数 f]

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f : (x, y) \mapsto z$$
$$z = f(x, y)$$

例：縦横の長さがそれぞれ x, y である長方形について

$$\ell = 2(x + y), \quad \text{周の長さ}$$
$$S = xy, \quad \text{面積}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{対角線の長さ}$$
$$\vdots$$

2 変数関数

定義

[n 変数の関数 f]

n 個の実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$
\begin{aligned}
f \ : \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) &\mapsto z \\
z &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ：独立変数　　z ：従属変数

$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が定義される $\}$: 定義域

$f(D) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) | f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$: 値域

2 変数関数

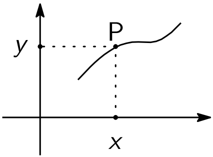
グラフ

[グラフ]

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフとは

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

のこと。 (D は定義域)



点 $\mathrm{P}(x, y)$ がグラフ上にある $\iff$ $y = f(x)$

f が連続ならば曲線となる。

2 変数関数

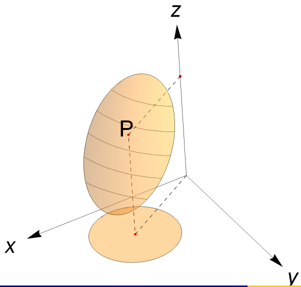
グラフ

2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

のこと。 (D は定義域)



P(x, y, z) がグラフ上 $\iff$ $z = f(x, y)$

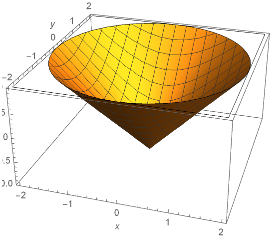
2 変数関数

グラフ

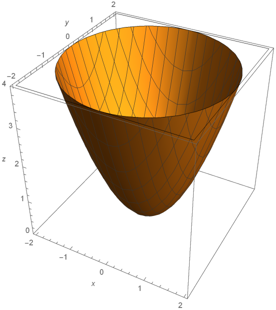
[グラフの目的]

1. グラフを用いると関数の値の変化の様子がよく分かる。

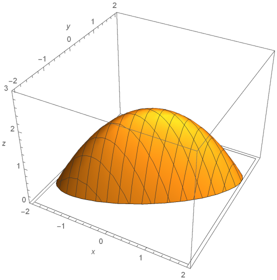
2. 図形をある関数のグラフと見ることにより, 図形の性質を関数の計算によって調べることができる。



(a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$



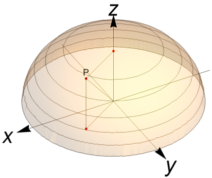
(b) $z=x^2+y^2$



(c) $z=2-x^2+2xy-2y^2$

2 変数関数
グラフ

[例 8.4]　$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフをかく。
ただし定義域は $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq 1\}$



グラフ上の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とおくと

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ だから

$$\iff \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

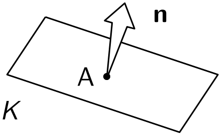
$$\iff \mathrm{OP} = 1, \ z \geqq 0$$

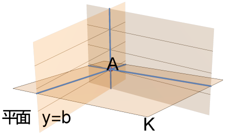
だから P は原点中心半径 1 の球面の上半分の上にある．したがってグラフは原点中心半径 1 の球面である。

$(x, y) \in D$ でないと $f(x, y)$ が定義できないことに注意。

2 変数関数
平面と 1 次関数

平面の方程式





(i) 点 A(a, b, c) を通り，ベクトル $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, -1)$ と垂直な平面 K の方程式は

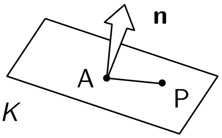
$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b) \cdots (\star)$$

である.

(ii) K と 平面 $y = b$ が交わってできる直線の傾き (これを x 方向傾きという) は α である。同様に y 方向傾きは β である.

平面 $y = b$ は A を通って y 軸に垂直な平面である。

2 変数関数
平面と 1 次関数



[確かめ] (i) $\mathrm{P}(x, y, z)$: K 上の A でない任意の点とする。

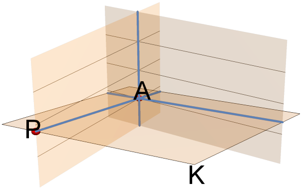
$$\text{P は } K \text{ 上にある.} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \mathbf{n} \ldots (\star\star)$$

である．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a, y-b, z-c)$ であるから

$$\begin{aligned}(\star\star) &\iff (x-a, y-b, z-c) \bullet (\alpha, \beta, -1) = 0 \\ &\iff \alpha(x-a) + \beta(y-b) - (z-c) = 0 \\ &\iff (\star)\end{aligned}$$

だから K の方程式は $(\star)$ である．

2 変数関数
平面と 1 次関数



(ii) P(x, y, z) を, A を K 上で y 座標は変えずに x 座標を 1 だけ増加した点とする。
$x = a + 1, \quad y = b$ だから $(\star)$ に代入すると
$z - c = \alpha$
したがって P の座標は $(a + 1, b, c + \alpha)$.
つまり

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ が } a \text{ から } a+1 \text{ まで } 1 \text{ だけ増加,} \\ y \text{ は } b \text{ のまま一定} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad z \text{ は } \alpha \text{ 増加}$$

だから OP の傾きは α。

2 変数関数
平面と 1 次関数

2 変数の 1 次関数のグラフ

(i) 1 次関数 $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$ のグラフは平面である。

(ii) この平面はベクトル $\mathbf{n}=(\alpha,\beta,-1)$ に垂直であり, x 方向傾きは α, y 方向傾きは β である。

[確かめ]　$f(x,y)=z$ とおくと

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma \quad \Longleftrightarrow \quad z-\gamma=\alpha(x-0)+\beta(y-0)$$

だから前に述べたことからわかる。