電気のための微分積分 D 演習問題 No.14 解答

問題 1　平面のスカラー場 $\varphi_1(x,y)=ax+by,\ \varphi_2(x,y)=\log(x^2+y^2),\ \ \varphi_3(x,y)=x^2+y^2$ を考える. (a, b は定数.)

(1) それぞれの勾配ベクトル場 $\mathbf{grad}\varphi_i$, $(i=1,2,3)$ を計算せよ.

$\mathbf{grad}\varphi_1$ の定義により

$$\mathbf{grad}\varphi_1(x,y)=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y)\right)$$

$\varphi_1(x,y)=ax+by$ を代入して

$$=((ax+by)_x,(ax+by)_y)=(a,b).$$

$\mathbf{grad}\varphi_2$ の定義により

$$\mathbf{grad}\varphi_2(x,y)=\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y)\right)$$

$\varphi_2(x,y)=\log(x^2+y^2)$ を代入して

$$=\big((\log(x^2+y^2))_x,(\log(x^2+y^2))_y\big)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

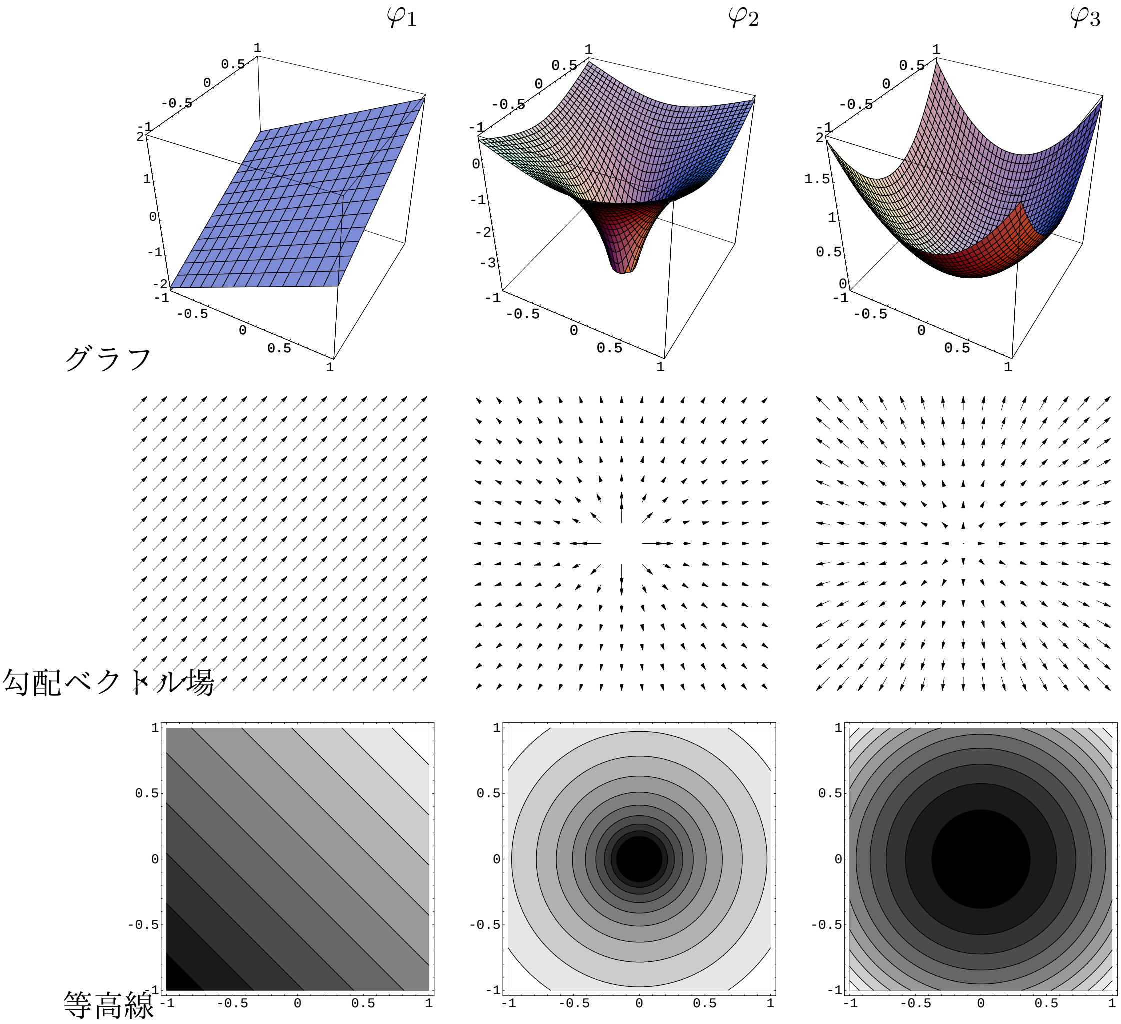
$\mathbf{grad}\varphi_3$ の定義により

$$\mathbf{grad}\varphi_3(x,y)=\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}(x,y)\right)$$

$\varphi_3(x,y)=x^2+y^2$ を代入して

$$=\big((x^2+y^2)_x,(x^2+y^2)_y\big)=(2x,2y).$$

(2) それぞれのグラフ, 勾配ベクトル場, 等高線を下の図から選べ.



問題 2　空間のスカラー場 $\varphi(x,y,z) = -\dfrac{1}{r}$,　を考える．ただし $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．

(1) 勾配ベクトル場 $\mathbf{grad}\varphi$ を計算せよ．

$\mathbf{grad}\varphi$ の定義により

$$\mathbf{grad}\varphi_5(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$\varphi(x,y,z) = -\dfrac{1}{r}$ を代入して

$$= \left(\left(-\frac{1}{r}\right)_x, \left(-\frac{1}{r}\right)_y, \left(-\frac{1}{r}\right)_z\right)$$

合成関数の微分法により

$$= \left(\frac{r_x}{r^2}, \frac{r_y}{r^2}, \frac{r_x}{r^2}\right)$$

再び $x^2+y^2+z^2=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと $r_x=r_t\times t_x=\left(\sqrt{t}\right)_t\times(x^2+y^2+z^2)_x=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)_t\times 2x=\dfrac{x}{r}$ 等となるから

$$=\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{x}{r^3}\right).$$

(2)

空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ の発散 $\mathbf{div}\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{x}{r^3}\right)$$

である．発散の定義により

$$\mathbf{div}\boldsymbol{A}=\left(\frac{x}{r^3}\right)_x+\left(\frac{y}{r^3}\right)_y+\left(\frac{x}{r^3}\right)_z$$

であるがここで

$$\left(\frac{x}{r^3}\right)_x=\frac{(x)_x\,r^3-x(r^3)_x}{r^6}=\frac{r^3-3xr^2\,r_x}{r^6}=\frac{r^3-3x^2r}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

$$=\frac{-2x^2+y^2+z^2}{r^5},$$

$$\left(\frac{y}{r^3}\right)_y=\frac{x^2-2y^2+z^2}{r^5},$$

$$\left(\frac{z}{r^3}\right)_z=\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5}$$

であるから

$$\mathbf{div}\boldsymbol{A}=0$$

となるが, ただしこれは $(x,y,z)=(0,0,0)$ 以外で正しい結果である．$(x,y,z)=(0,0,0)$ では $\mathbf{div}\boldsymbol{A}$ は (通常の意味では) 定義できない．