電気のための微分積分 D 演習問題 No.12 解答

1. 2 つのベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (1,2,3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (2,0,-1)$ に対し，次の値およびベクトルを求めよ.

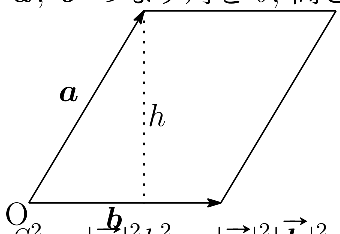
(1) $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right)$
$= (2 \times (-1) - 3 \times 0, 3 \times 2 - 1 \times (-1), 1 \times 0 - 2 \times 2) = (-2, 7, -4)$.

(2) $\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$
$= (3 \times 0 - 2 \times (-1), 1 \times (-1) - 3 \times 2, 2 \times 2 - 1 \times 0) = (2, -7, 4)$.

(3) $(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = (-2, 7, -4) \bullet (1, 2, 3) = -2 + 14 - 12 = 0$. だから直交する.

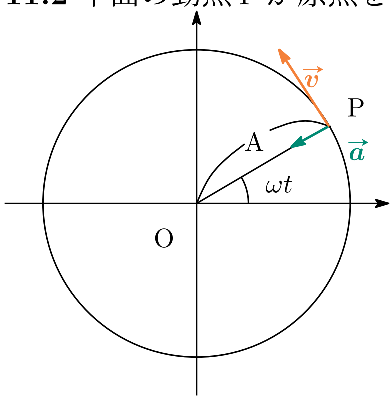
(4) 面積を S とおくと $S = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{69}$ がひとつの答え.

次のように直接面積を計算しに行ってもよい。
$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ のなす角を θ, 高さを h とする.



$S^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 h^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 \sin^2\theta$
$(\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だから$)$
$= |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 - (|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\cos\theta)^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 - (\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})^2 = 14 \times 5 - (-1)^2 = 69$.
だから $S = \sqrt{69} = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|$.

11.2 平面の動点 P が原点を中心に半径 A 角速度 ω で等速円運動している。



(1) $t=0$ のとき $(A,0)$ にいるとしてこの点のパラメータ表示をかけ。

P は時刻 t には円周上を点 $(A,0,0)$ から出発して ωt ラジアン回転したところにいる．このときの P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は三角関数の定義をおもいだすと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (A\cos\omega t, A\sin\omega t)$ （これを $= \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ とおく）

(2) 速度ベクトルを求めよ。また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係を述べよ。

速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ は 位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}}$ を時間微分したものだから

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}A\cos\omega t, \frac{d}{dt}A\sin\omega t\right) = (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係は

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{r}} = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \bullet (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t) = 0$$

だから $\vec{\boldsymbol{v}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

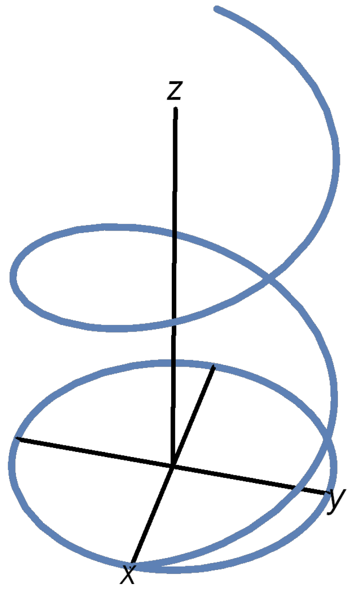
(3) 加速度ベクトルを求めよ。また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係を述べよ。

加速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}(t)$ は 速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}$ をさらに時間微分したものだから

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}(-A\omega\sin\omega t), \frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)\right)$$
$$= \left(-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t\right) = -\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と逆向きで, 大きさは $A\omega^2$.
この点はつねに中心に向かって一定の力で引っ張られていることになる。

3.　動点 P の位置ベクトルが時刻 t によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t, ct)$ $(= \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ とおく$)$ のように表されるものとする.



これは図のような螺旋（らせん）である。

(1) このとき 速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$, 加速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}(t)$ を求めよ.

$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = ((\cos t)', (\sin t)', (ct)') = (-\sin t, \cos t, c).$　　($'$ は $\frac{d}{dt}$ とおなじ)

$\overrightarrow{\boldsymbol{a}(t)} = \dfrac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = ((\cos t)'', (\sin t)'', (ct)'') = (-\cos t, -\sin t, 0).$　　($''$ は $\frac{d^2}{dt^2}$ とおなじ)

(2) $\vec{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$ としたとき $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ となっていることを確かめよ.

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{v}} &= (0,0,1) \times (-\sin t, \cos t, c) \\
&= \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos t & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & -\sin t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right) \\
&= (-\cos t, -\sin t, 0) = \vec{\boldsymbol{a}}.
\end{aligned}
$$

(3) この曲線の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の部分の長さ s を求めよ.

「道のりは速さの時間積分」だから

$$
s = \int_0^{2\pi} |\vec{\boldsymbol{v}}| dt
$$

である. ところで

$$
\left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| = |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{1 + c^2}
$$

だから

$$
s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + c^2} dt = 2\pi \sqrt{1 + c^2}.
$$

(4) ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{k}}$ の C 上線積分 $\displaystyle\int_C \vec{\boldsymbol{k}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}$ を求めよ。ただし C の向きは t の増加する向きとする。

$$
\int_C \vec{\boldsymbol{k}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_0^{2\pi} \vec{\boldsymbol{k}} \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (0,0,1) \bullet (-\sin t, \cos t, c)\, dt = \int_0^{2\pi} c\, dt = 2\pi c
$$