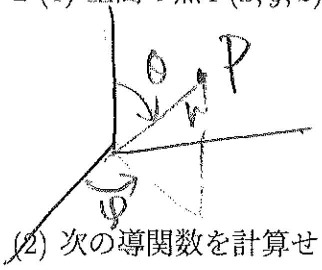
電気のための微分積分D 演習問題 No.11　2021. 7. 1

学生番号	氏名

1 (1) 空間の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の極座標を (r,θ,φ) とするとき, x,y,z を r,θ,φ で表せ.



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

(2) 次の導関数を計算せよ.

$x_r = \sin\theta\cos\varphi$　　$x_\theta = r\cos\theta\cos\varphi$　　$x_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi$

$y_r = \sin\theta\sin\varphi.$　　$y_\theta = r\cos\theta\sin\varphi.$　　$y_\varphi = r\sin\theta\cos\varphi.$

$z_r = \cos\theta$　　$z_\theta = -r\sin\theta$　　$z_\varphi = 0$

(3) この変換のヤコビアンを計算せよ。

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi.$$

$$+ r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi.$$

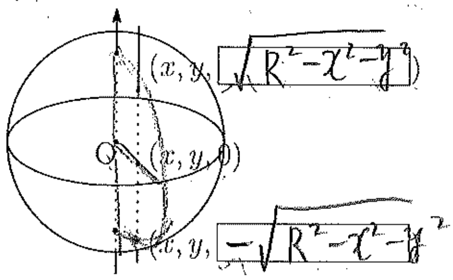
$$= r^2\sin\theta\{\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\}$$

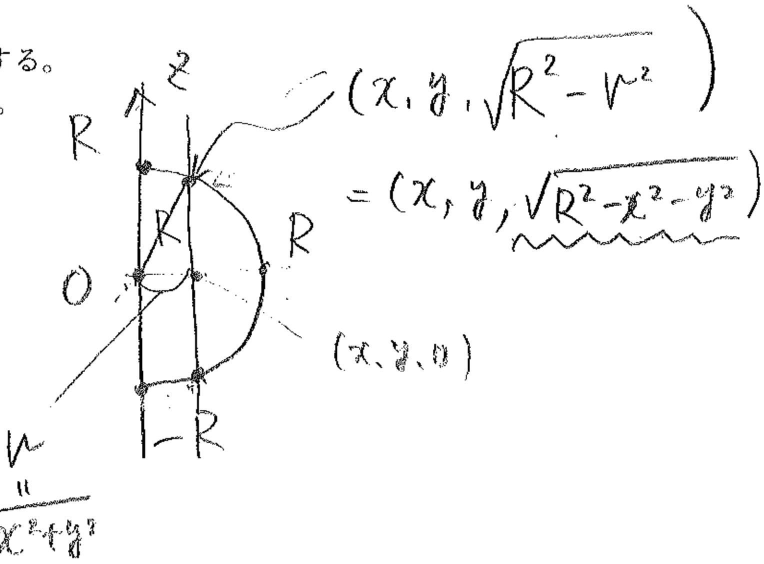
$$+ r^2\cdot\sin\theta\{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi\}$$

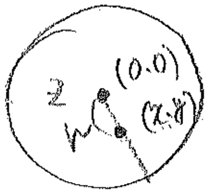
$$= r^2\sin\theta.$$

2 G を原点中心半径 $R > 0$ の球とする。

(1) G の体積を串刺し法で計算せよ。





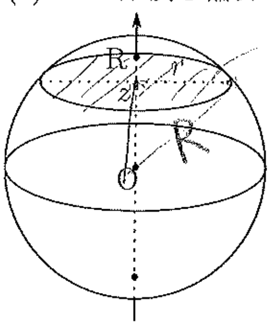


$$V(\ ) = \iint_{D} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \text{あとは No10をみよ}$$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq R^2\}$.

$$= \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(2) G の体積を輪切り法で計算せよ。



$z^2 + r^2 = R^2$ だから

$r = \sqrt{R^2-z^2}$.

だから断面の円の面積は.

$S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2-z^2)$.

体積は. $\displaystyle\int_{-R}^{R} S(z)\,dz = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)\,dz.$

$$= \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-R}^{z=R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$