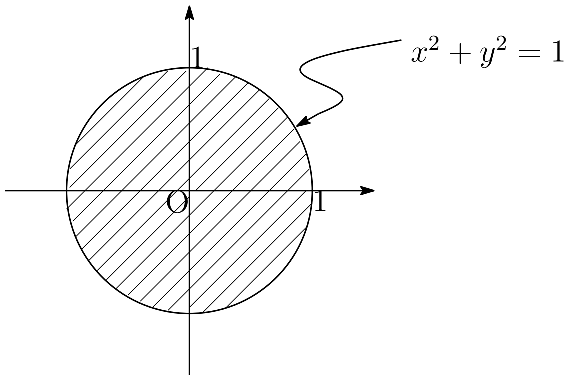
電気のための微分積分D 演習問題 No.10 解答

[**お願い**] この解答がわかりにくい、もっと丁寧に説明してほしいという人は、メイルを出す、授業中に発言するなどの方法で小山までお知らせください。その際、わからない箇所を具体的に指摘してくれると大変ありがたいです。授業中に説明をいたします。

1 次の積分領域を図示し二重積分を計算せよ.

(1) $D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とするとき

$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$



極座標変換すると

$\sqrt{x^2+y^2}=r,\quad dxdy=rdrd\theta,$

$\Omega=\{(r,\theta)\ :-\pi\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq 1\ \}$

だから

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_\Omega r\,rdrd\theta$$

累次積分すると

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 \left(r^2\right)dr\right]d\theta=2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r\to 0}^{r\to 1}=2\pi\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\,\pi}{3}$$

(2) $D=\{(x,y);\ x^2+y^2\leqq R^2\}$ (R は正の定数) とするとき

$\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

極座標変換すると

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2},\quad dxdy=rdrd\theta,$

$\Omega=\{(r,\theta)\ :-\pi\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq R\ \}$

だから

$$= \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\theta$$

累次積分すると

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right) r \ dr \right] d\theta$$

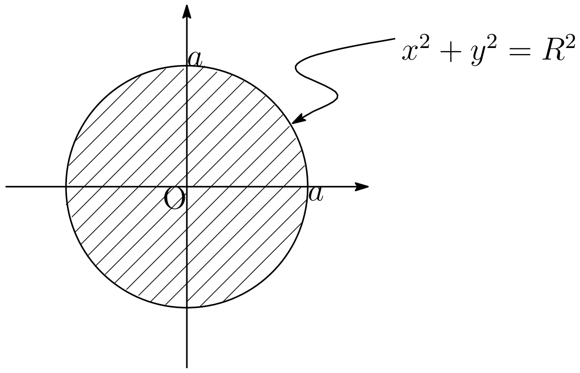
$R^2 - r^2 = t$ とおくと

$\dfrac{dt}{dr} = -2r$ だから $rdr = \dfrac{-dt}{2}$

$r = 0$ のとき $t = R^2,\ r = R$ のとき $t = 0$

だから

$$= 2\pi \int_{R^2}^{0} \sqrt{t} \left(\frac{-dt}{2} \right) = 2\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-1}{2} \right) \right]_{t \to R^2}^{t \to 0} = \frac{2\pi R^3}{3}$$



2 次の二重積分を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x - y)\, dxdy$$

$D = \{(x, y) \mid -\pi \leqq x \leqq \pi, -\pi \leqq y \leqq \pi\ \}$

$$\begin{cases} t = x - y \\ s = y \end{cases}$$

により変数変換する. これは

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = s \end{cases}$$

と同値である。

$$\begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Omega = \{(t, s) | -\pi \leqq t + s \leqq \pi,\ -\pi \leqq s \leqq \pi\} = \{(t, s) | -\pi \leqq s \leqq \pi,\ -s - \pi \leqq t \leqq -s + \pi,\ \}$

だから置換積分・累次積分すると

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x - y)\, dxdy &= \iint_{\Omega} \sin(t)\, dtds = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-s-\pi}^{-s+\pi} \sin(t)\, dt \right) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big[-\cos(t) \Big]_{t=-s-\pi}^{t=-s+\pi} ds = \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(-s + \pi) + \cos(-s - \pi))\, ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(-s + \pi) + \cos(-s - \pi))\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} (+\cos(-s) - \cos(-s))\, ds = 0 \end{aligned}$$