本日やること

1. 微分方程式
   - 微分方程式とはどういうものか

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

2 年次科目　前期：電気のための微分積分 D (14 回),

内容は 2 変数関数の微積分・ベクトル解析

後期：微分方程式

運動方程式 (力 $=$ 質量 $\times$ 加速度) は微分方程式である。だから力学・工学の基本。

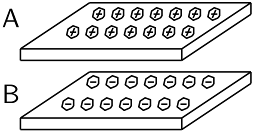
電磁気学は微分方程式を使って表現されている。

電気回路の解析をキチンと考えるために必要。

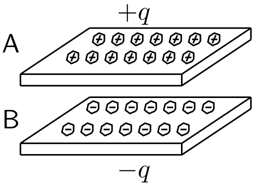
微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 1. コンデンサーの放電]



平行に置かれた 2 枚の金属板に電荷をためることができる。
この状態で B から A に単位電荷を運ぶためには（電気力に逆らって電荷を運ばなくてはならないので）仕事が必要。
この仕事の量を AB 間の電位差といい, V で表す。(単位はボルト)



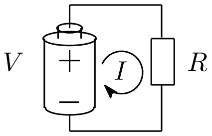
A の電荷を $+q$(クーロン), B の電荷を $-q$(クーロン) とする。
電位差 V は q に比例するから

$$q = CV \cdots (\star 1)$$

この比例定数 C を静電容量という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



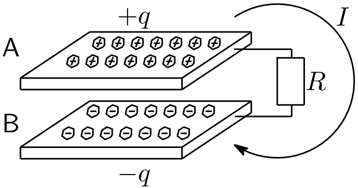
電位差 V のある 2 点を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる。その関係は

$$V = I\,R \cdots (\star 2)$$

電池は電荷が無制限にあるので，電位差を保ったままいつまでも電流が流れ続ける（と考える）。

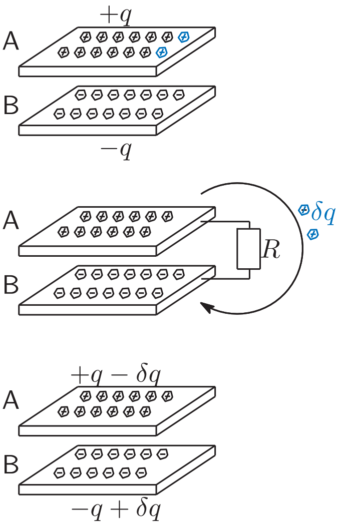
微分方程式

微分方程式とはどういうものか



電荷を帯びた金属版を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる. I は A から B の向きに測る。電流により電荷が失われていくので電荷 q 電位差 V が変化しその結果 I も変化する。
q, V, I は時刻 t の関数となるので, $q(t)$, $V(t)$, $I(t)$ と書く。

微分方程式
微分方程式とはどういうものか



この $I(t)$ を計算しよう。
t から $t+\Delta t$ までの, A から B への電荷の移動量を δq と書く。このとき, 1 秒間に 1 クーロンの電荷が流れるとき 1 アンペアの電流というのであるから

$$\frac{\delta q}{\Delta t} \fallingdotseq I(t)$$

一方, t から $t+\Delta t$ までの $q(t)$ の変化量を

$$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$$

と書くと $\Delta q = -\delta q$ だから

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \fallingdotseq -I(t)$$

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

$\Delta t \to 0$ とする極限をとって

$$\frac{dq}{dt} = -I(t) \cdots (\star 3)$$

$(\star 1)$, $(\star 2)$, $(\star 3)$ をまとめて

$$-I(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CR\frac{dI}{dt}$$

$$CR\frac{dI}{dt} + I(t) = 0 \cdots (\star 4)$$

このような未知の関数 $I(t)$ とその導関数の関係式を微分方程式という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

この微分方程式 $(\star 4)$ を満たす関数 (これを微分方程式の解という) を求めよう。

$$
\begin{aligned}
CR\frac{dI}{dt} + I() = 0 \\
CR\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -1 \\
CR\int \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}\,dt = \int -1\,dt \\
CR\int \frac{1}{I}\,dI = \int -1\,dt
\end{aligned}
$$

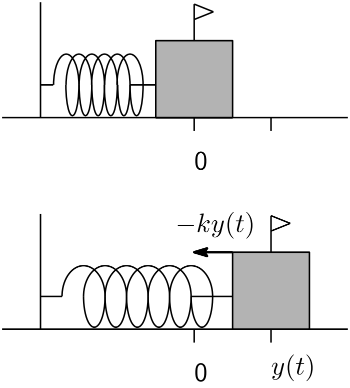
.

である。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 2. 単振動]



図のように壁面に物体がバネでつながれている．床は摩擦がないものとする．
時刻 を t [s],
物体の質量を m [kg],
物体の時刻 t での位置を $y(t)$ [m] で表す．
(位置, 速度は右向きを正として測る.)

ばねが伸び縮みしていないときの物体の位置を原点とすると，物体にはバネの弾性力 $-ky(t)$ [N] が働く．ただし $k > 0$ は弾性定数である．運動方程式から $y(t)$ は微分方程式

$$my''(t) = -ky(t)$$

を満たすことがわかる．

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

解は

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{または} \quad y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

(C_1, C_2, A, φ は $y(0)$, $y'(0)$ から決まる定数)

である.