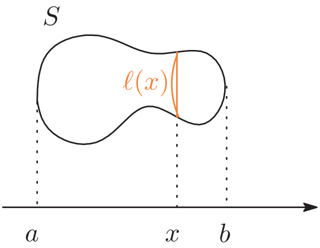
本日やること

1. 積分法の応用
   - 平面図形の面積

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



左図のような図形を，点 $(x,0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする．$\ell(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

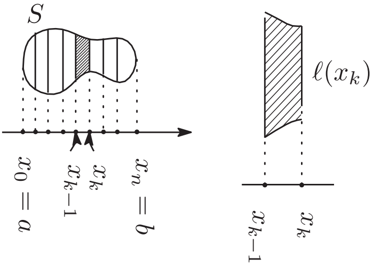
$$S = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

.

積分法の応用

平面図形の面積

[確かめ]



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

k 番目の断片の面積 $\fallingdotseq \ell(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

$\ell(x)\,dx$ は微小長方形の面積であることに注意せよ。

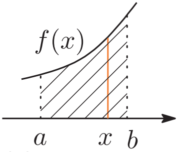
積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

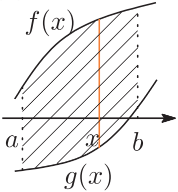
(i)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ であるとき,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であるとき,

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

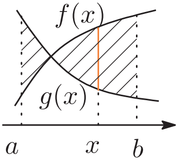
積分法の応用

平面図形の面積

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



区間 $[a, b]$ で $f(x)$, $g(x)$ の大小関係が一定でないときでも

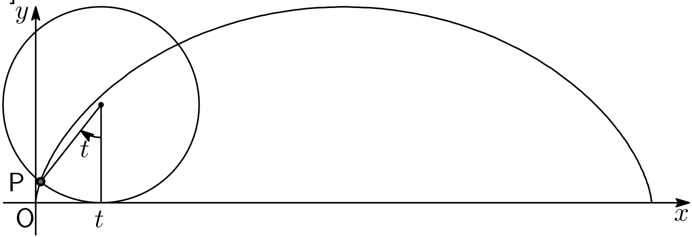
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

[確かめ]
(i) のとき,　$\ell(x) = f(x)$,
(ii) のとき,　$\ell(x) = f(x) - g(x)$,
(iii) のとき,　$\ell(x) = |f(x) - g(x)|$
だから。

積分の応用

平面図形の面積

[例]



$a > 0$：定数　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき

$$(\star) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

によってパラメータ表示される曲線 C を cycloid (サイクロイド) 曲線 という. C と x 軸で囲まれた部分 D の面積を求める.

積分の応用
平面図形の面積

x, y が $(\star)$ を満たすとき, 点 P(x, y) が動いてできる奇跡が C である.

$$\ell(x) = y = a(1-\cos t), \quad dx = \frac{dx}{dt}dt = a(1-\cos t)dt$$

だから置換積分により

$$D \text{ の面積} = \int_0^{2\pi a} \ell(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$