本日やること

1. 積分法
   - 広義積分

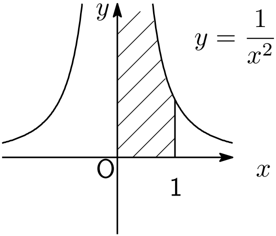
定積分法

広義積分

$$f(x) \text{ は有界閉区間 } [a,b] \text{ で連続} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ が存在}$$

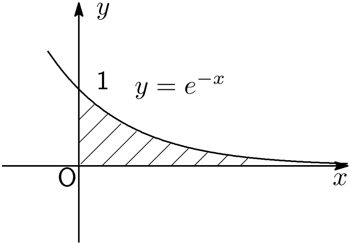
[1. 端の点で不連続な (または連続になるように定義できない) 場合]

例



2. [積分区間が有界でない場合]

例

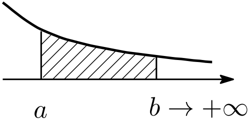


の積分も重要である.
このような場合の関数 $f(x)$ の定積分を定めよう.

定積分法

広義積分

[1] 区間 $[a,\infty)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a,\infty)$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[F(x)\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^\infty = F(\infty) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[2] 区間 $(-\infty, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(-\infty, b]$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

となる。これを

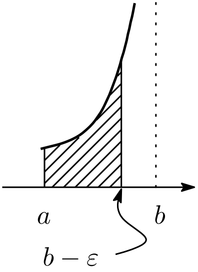
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[3] 区間 $[a, b)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a, b)$ で連続であるが $x = b$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき**広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する**といい, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[F(x)\Big]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[4] 区間 $(a, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(a, b]$ で連続であるが $x = a$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するとき**広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する**といい, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$$

と書く。

定積分法

広義積分

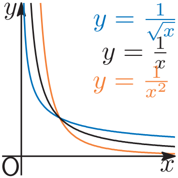
[例題 6.3.5]

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 1.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \log b - 0 = \infty.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_{+0}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to+0} \log\varepsilon = \infty.$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$



定積分法

広義積分

広義積分でも部分積分法・置換積分法が使える

[例 1] $\displaystyle\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$

であるが, $-2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{-dt}{2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \infty \Rightarrow t \to -\infty$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^t\,\frac{(-dt)}{2} = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$$

としてもよい。

定積分法

広義積分

[例 2]

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx = \int_0^{\infty} x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\,dx$$

$$= \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\,dx$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$