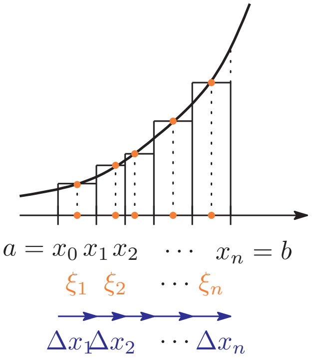
本日やること

1. 積分法
   - 定積分の定義の復習
   - 微分と積分の関係

定積分法

復習

[復習：定積分の定義]　$a < b$ のとき



$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ \ k = 1, \cdots, n$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \ k = 1, \cdots, n$$
$$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$$

として

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

と定める.

[大事なこと]　$f(x)$ が有界な閉区間 $[a, b]$ で連続 $\Rightarrow$ 積分可能

定積分法

微分と積分の関係

[目標]

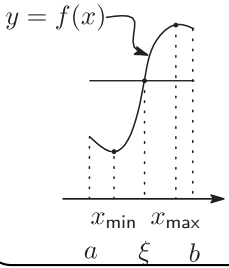
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

定積分法

微分と積分の関係

積分の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad a \leqq \xi \leqq b$$

となる ξ が存在する.

[確かめ] $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから $[a, b]$ において

最大値 : $M = f(x_{\mathrm{max}})$, 　最小値 : $m = f(x_{\mathrm{min}})$

がある. (最大値最小値の定理.)

定積分法

微分と積分の関係

$m \leqq f(x) \leqq M$ であるから

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

したがって

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

だから

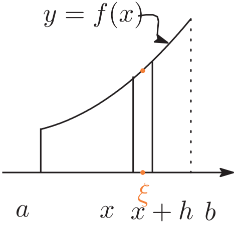
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

となる ξ が x_{max} と x_{min} の間に存在する. (連続関数に対する中間値の定理)

ここに現われる $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の平均値という.

定積分法
微分と積分の関係

微分積分学の基本定理



$f(x)$: $[a,b]$ で連続

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている．つまり連続関数は原始関数を持つといってよい．

定積分法

微分と積分の関係

[確かめ] 積分の平均値の定理により

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi), \quad x \leqq \xi \leqq x+h$$

となる ξ があるが, $h \to 0$ のとき $\xi \to x$ したがって $f(\xi) \to f(x)$.

定積分法

微分と積分の関係

定積分と原始関数の関係

$f(x)$: $[a,b]$ で連続

$F(x)$: $f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く} \right)$$

[確かめ] $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $f(x)$ の原始関数になっている．だからある定数 C があって

$$G(x) = F(x) + C.$$

定積分法

微分と積分の関係

$x = a$ を代入して

$$G(a) = F(a) + C.$$

$G(a) = 0$ だから

$$F(a) = -C.$$

$x = b$ を代入して

$$G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ だから結論が得られた。