本日やること

1. 積分法
   - 定積分の考え方
   - 定積分の定義
   - 定積分の性質

定積分法

初めに

[復習：不定積分]

$$\int f(x)\,dx = F(x)\,(+C) \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の a から b までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

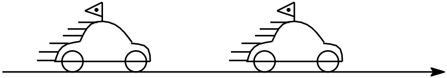
によって 高校では 定めたのであった. $\longrightarrow$ $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が計算できないとき困るので, 原始関数を用いない定義を考える.

定積分法

導入

動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$ とする.

時刻 $\quad t \quad t+h$



y

座標 $\quad f(t) \quad f(t+h)$

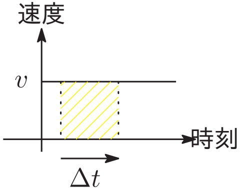
このとき

$$(\text{時刻 } t \text{ の}) \text{ 瞬間の速度 } v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

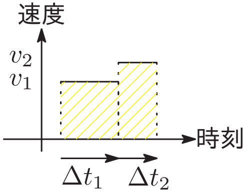
定積分法
導入

[$v=$ 一定の場合]　($v \geqq 0$ とする)



位置の変化量 $= v \times \Delta t =$ □ の面積

[v が変化する場合]

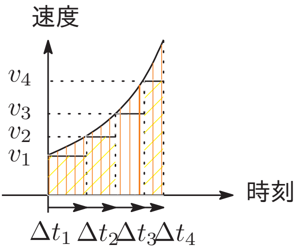


位置の変化量 $= v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 =$ □ の面積

定積分法

導入

[v が連続的に変化する場合]



位置の変化量

$$\fallingdotseq v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 + v_3\,\Delta t_3 + v_4\,\Delta t_4$$

$= \square$ の面積

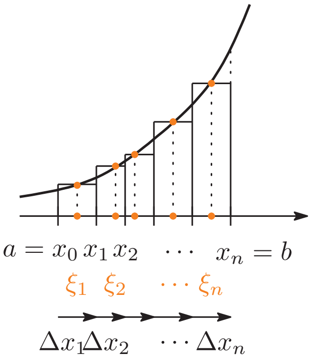
$\downarrow$

$\square$ の面積

定積分法

定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する．



$y = f(x)$：関数　$a < b$ とし，

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

：区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする．

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という．

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で積分可能であるという．この極限を $f(x)$ の a から b までの定積分とよび, $\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

である．a を積分の下端, b を上端という．

定積分法

定積分の定義

定積分の定義 (II)

a を下端, b を上端とするとき, $a > b$ の場合も $(\star)$ で定義する. ただしこのとき

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b \\
&x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k, \ \ k = 1, \cdots, n \\
&\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (\leqq 0), \ \ k = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

である.

したがって

$$
\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0
$$

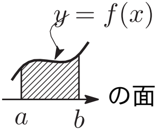
定積分法

定積分の性質

定積分の大事なこと

(I) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a, b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ 

の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$$\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$$ (時刻 a から b までの位置の変化量)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$$

(ii) $$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii)

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$ (ただし C は x によらない定数)

定積分法

定積分の性質

定積分の性質 (続き)

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(v) 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

特に，$f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

(vi) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (ただし $a < b$ の場合)