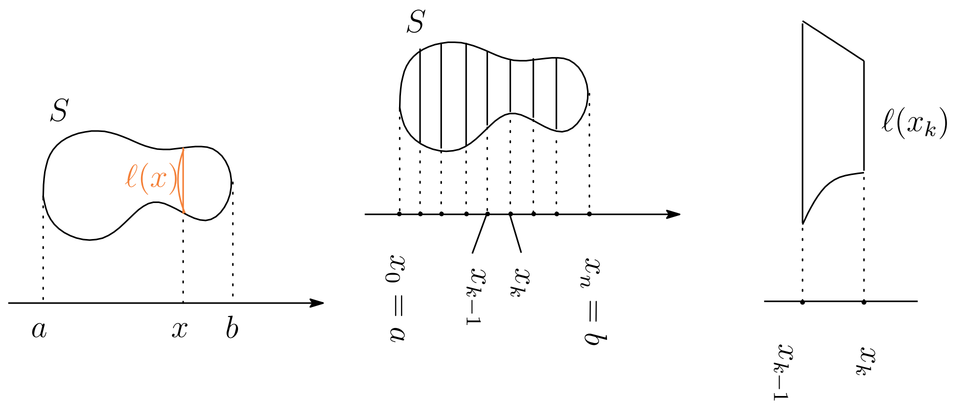
電気のための微分積分 C
第 5 回解答

5.1.



左図のような図形を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. このとき図形の面積 S を $\ell(x)$ で表せ. 簡単でよいからそうなる説明をつけること.

右図のように S を分割し k 番目の断片に着目すると, その面積は大体 $\ell(x_k) \times \Delta x_k$ で近似される. (ここで x_k は k 番目の分点, Δx_k は k 番目の小区間の幅である.) したがって S は

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k) \Delta x_k$$

のように近似されるが

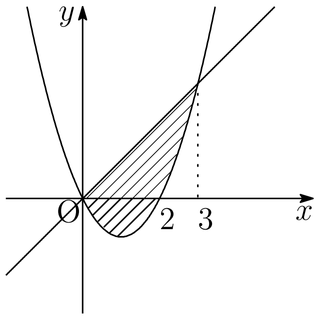
$$\lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k) \Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\, dx \quad (\lim \text{ は分割を細かくする極限})$$

であり, 近似の誤差は極限を取ると 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

である.

5.2. (1) (1) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = x$ のグラフの概形を書け. また, 二つのグラフの交点の座標を求めよ.



$y = x^2 - 2x = x(x-2)$ であるから $x = 0$ または $x = 2$ のとき $y = 0$ となるので x 軸との交点は $(0,0)$ $(2,0)$ である．また $y = (x-1)^2 - 1$ だから頂点が $(1,-1)$ の放物線である．下に凸であるのは明らか.

$y = x$ は原点をとおり傾き 1 の直線である.

交点の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$$

をといて $(0,0)$ と $(3,3)$.

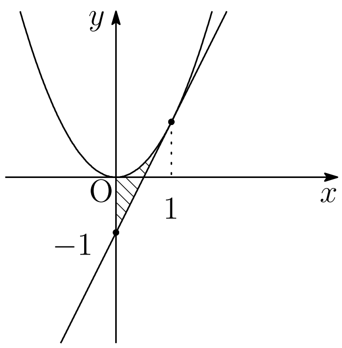
(2) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = x$ のグラフで囲まれる部分の面積を計算せよ.

この部分は $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあり，この範囲では直線 $y = x$ が放物線 $y = x^2 - 2x$ の上方にある。

$$\int_0^3 \left\{x - (x^2 - 2x)\right\} dx = \int_0^3 \left\{-x^2 + 3x\right\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

5.3. (1) 放物線 $y = x^2$ とその点 $(1,1)$ における接線を図示せよ。

$f(x) = x^2$ とおくと $f'(x) = 2x$, したがって $f'(1) = 2$ だから 点 $(1,1)$ における接線の傾きは 2 である．接線は 点 $(1,1)$ を通り傾き 2 の直線であるから方程式は $y - 1 = 2(x-1)$, 即ち $y = 2x - 1$ である.



(2) 囲まれる図形は $y = x^2$ のグラフと直線 $y = 2x - 1$ で上下から挟まれているのでその面積は

$$S = \int_0^1 (x^2 - (2x-1))\, dx = \left[\frac{x^2}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

5.4. (1) 曲線 $C: y = x^3 - 2x + 1$ の増減を調べよ。

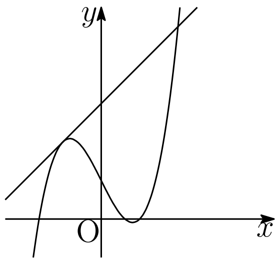
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ とおく。

$f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$x < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $f'(x) > 0$ だから単調増加

$-\frac{\sqrt{6}}{3} < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $f'(x) < 0$ だから単調減少

$\frac{\sqrt{6}}{3} < x$ のとき $f'(x) > 0$ だから単調増加



$\frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$ に注意。

(2) C の $x = -1$ である点における接線 ℓ の方程式を求めよ。

$f'(-1) = 1$ だから傾きは 1. $f(-1) = 2$ だから接点は $(-1, 2)$ したがって ℓ は

$y = f'(-1)(x+1) + 2 = x + 3$

(3) C と ℓ の交点を求めよ。

交点の座標 (x, y) は $\begin{cases} y = x^3 - 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$ の解である。

接点は $(-1, 2)$ であるから $x = -1,\ y = 2$ がひとつの解である。

y を消去して

$x + 3 = x^3 - 2x + 1 \iff x^3 - 3x - 2 = 0$

$x = -1$ がひとつの解であるから $x^3 - 3x - 2$ は $x + 1$ で割り切れる。わり算を実行すると

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)(x+1)(x-2)$

だから他の解は $x=2$. このとき $y=5$ だからもう一つの交点は $(2,5)$. あわせて

$(x,y)=(-1,2),(2,5)$

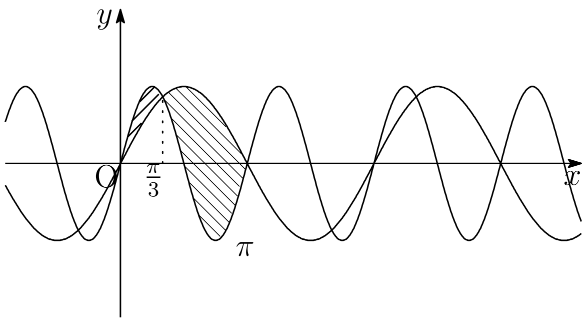
(4) C と ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ。

ℓ のほうが上にあるから (赤字訂正)

$$\int_{-1}^{2}((x+3)-(x^3-2x+1))\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

5.5. 区間 $[0,\pi]$ において, 2 つの曲線 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.

図示すると



となる.

$y=\sin x$ と $y=\sin 2x$ の交点は

連立方程式

$$\begin{cases} y &= \sin x \\ y &= \sin 2x \end{cases}$$

を解けば求まる.

$\sin 2x-\sin x=0$ であるが $\sin 2x=2\sin x\cos x$ だから

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{1}{2}$

これを満たす x の値は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲では $x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$.

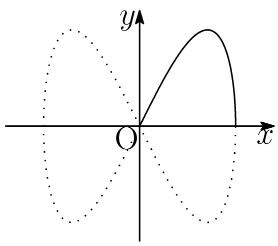
また, $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ の範囲では $\sin 2x\geqq\sin x$, $\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ の範囲では $\sin 2x\leqq\sin x$, したがって囲まれる部分の面積は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{2}\cos 2x - \cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

5.6. (変更) ($\star$) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin(2\theta) \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のようにパラメータ表示された曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

曲線は図の様になる。Mathetatica で書いて見よ。コマンドは

```
ParametricPlot[{Cos[t], Sin[2 t]}, {t, 0, Pi/2}]
```



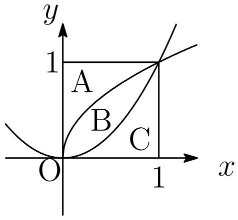
$$\ell(x) = y = \sin(2\theta), \quad dx = -\sin\theta\, d\theta$$

だから置換積分により

$$\text{面積} = \int_0^1 \ell(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin(2\theta)\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos(3\theta) - \cos\theta)\, d\theta = \frac{2}{3}$$

$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}(\cos(A+B) - \cos(A-B))$ を使った。

5.7. 曲線 $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ と直線 $x = 1$, $y = 1$ と x 軸, y 軸で囲まれる図のような部分の面積を求めよ。



$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3} \\
C &= \int_0^1 (x^2)\,dx = \frac{1}{3} \\
A &= C = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

5.8. $\boxed{\text{発展}}$ 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフを $\mathcal{C}$ とし, $\mathcal{C}$ の $x = \alpha$ である点における接線を ℓ とする. ℓ と $\mathcal{C}$ のもう一つの交点の x 座標を β とする. $\mathcal{C}$ と ℓ で囲まれる部分の面積を α, β で表せ.

各自考えるべし。