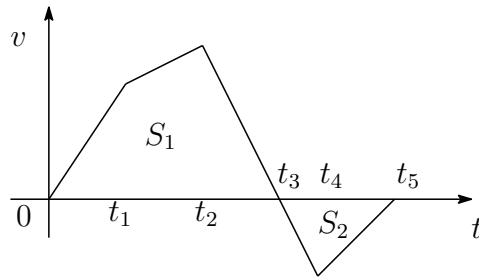


電気のための微分積分 C 第1回解答

- 1.1. 直線上を運動する動点 P がある. 時刻 t での P の速度 $v(t)$ のグラフは図のようである.



- (1) 最も速度が大きくなる時刻はいつか

最も速度が大きくなる時刻は 縦座標が最大になる点だから t_2 .

- (2) 最も出発点から遠ざかる時刻はいつか. またそのときの出発点からの距離をグラフと t 軸で囲まれる図形の面積 S_1, S_2 を用いて表せ.

$0 < t < t_3$ では $v(t) > 0$ だから点は右方向に運動する. $t = t_3$ で一瞬停止して $t_3 < t < t_5$ では $v(t) < 0$ だから点は左方向に運動する. したがって, 最も出発点から遠ざかる時刻は 最も右へ行く時刻だから $t = t_3$. そのときの出発点からの距離は

$$\int_0^{t_3} v(t) dt = S_1.$$

- (3) 時刻 t_5 での出発点からの距離と, それまでに動いた道のりを S_1, S_2 を用いて表せ.

時刻 t_5 での出発点からの位置の変化量は

$$\int_0^{t_5} v(t) dt = \int_0^{t_3} v(t) dt + \int_{t_3}^{t_5} v(t) dt = S_1 - S_2.$$

それまでに動いた道のりは

$$\int_0^{t_5} |v(t)| dt = \int_0^{t_3} |v(t)| dt + \int_{t_3}^{t_5} |v(t)| dt = S_1 + S_2.$$

- 1.2. 空中を自由落下する物体は地球の引力によって鉛直下向きに $g (= 9.8[m/s^2])$ の加速度が生じる。つまり、時刻 $t[s]$ の下向きの速度を $v(t)[m/s]$ とするとき

$$\frac{d}{dt}v(t) = g$$

である。したがって速度 $v(t)$ は g の原始関数である。従って時刻 $0[s]$ から $t_1[s]$ までの速度の変化は定積分を用いて

$$v(t_1) - v(0) = \int_0^{t_1} g dt = gt_1$$

のように求められる。(記号 t_1 を使ったのは積分に使われる変数 t と同じ記号を使いたくなかったからです。) だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での速度 $v(t)$ は $v(0), g$ を用いて

$$v(t) = gt + v(0)$$

と表される。

(2) 時刻 $t_1[s]$ での物体の座標を $y(t_1)[m]$ とすると **速度と座標変化量の関係は**

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t) dt$$

であるから (1) の結果を使って

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t) dt = \int_0^{t_1} (gt + v(0)) dt = \frac{1}{2}gt_1^2 + v(0)t_1$$

となる。だから t_1 を t に置き換えることにより時刻 t での座標 $y(t)$ は $y(0), v(0), g$ を用いて

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + y(0)$$

と表される。

