積分の基本事項集 解答例

以下, 積分定数 C は省略する.

1. (不定積分の定義)

(1) 「関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数である」とはどういうことか、その定義を書け.

教科書 P.126 をよく読んで考えること。

(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表す. $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を定義する式を完成せよ.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

以後, 積分定数 C を省略する.

2. (主な関数の不定積分) 教科書 P.308 が参考になる。

(1) a を 0 でない定数とするとき,

$\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$

だから

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}x^a\right) = x^{a-1}$

だから

$\displaystyle\int x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}x^a.$

ここで $\alpha = a-1$ とおくと, $a = \alpha + 1$ だから $\alpha \neq -1$ であるとき

$\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$ (a と α を区別せよ)

$\alpha = -1$ であるときは次を使う.

(2) $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$

だから

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|.$

(3) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

だから

$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x.$

(4) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
だから
$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x.$ $\sin\dfrac{x^2}{2}$ は誤り.

(5) $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
だから
$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x.$

3. (不定積分の性質)

(1) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

ただし, これが正しいのは k が定数のときであり, $\displaystyle\int xf(x)\,dx = x\int f(x)\,dx$ は誤り.

4. (べき関数の不定積分)

(1) 空欄に適する式を書け.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^{-1} & & x^{-\frac{1}{2}} & & x^{0} & & x^{\frac{1}{2}} & & x^{1} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\frac{1}{x} & \xrightarrow[\sqrt{x}\text{倍}]{} & \frac{1}{\sqrt{x}} & \xrightarrow[\sqrt{x}\text{倍}]{} & 1 & \xrightarrow[\sqrt{x}\text{倍}]{} & \sqrt{x} & \xrightarrow[\sqrt{x}\text{倍}]{} & x
\end{array}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ だから 2 (1) により

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$$

(3) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ だから

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

(4) $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ だから

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

(5) $\displaystyle\int \left(3x-2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\int x\,dx - 2\int 1\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 4\sqrt{x}$

5. (置換積分法)

$\displaystyle\int (x\ \text{の関数})\,dx$ を

(手順 1) $x=\varphi(t)$ または $\psi(x)=t$ とおくことにより x の関数を t の関数に変形する.

(手順 2) (手順 1) の関係式を微分して $dx=(x,\,t$ の式 $)\,dt$ の形の関係式を得て, dx を $(x,\,t$ の式 $)\,dt$ で置きかえる.

このことにより, $\displaystyle\int (t\ \text{の関数})\,dt$ に変形することができて積分が計算できることがある. この方法を置換積分法という.

(1) $3x+1=t\cdots(*)$ とおくと

$(3x+1)^4=t^4$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\displaystyle\frac{dt}{dx}=3$

だから $dx=\dfrac{1}{3}\,dt$. これらを使って

$$\int (3x+1)^4\,dx == \int t^4\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\,\frac{t^{4+1}}{4+1} = \frac{t^5}{15} = \frac{1}{15}(3x+1)^5$$

(2) (1) と同じ変数変換と 4 (3) を使って

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$$

(3) (1) と同じ変数変換と 2 (2) を使って

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\log|t| = \frac{1}{3}\log|3x+1|$$

(4) (1) と同じ変数変換で

$$\int e^{3x+1}\,dx = \int e^t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{3x+1}$$

(5) (1) $3x + \dfrac{\pi}{2} = t \cdots (**)$ とおくと

$\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin t$

$(**)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = 3$

だから $dx = \dfrac{1}{3}\,dt$. これらを使って

$$\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\,dx = \int \sin(t)\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cos(t)$$
$$= -\frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cos\left(\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{\pi x}{2}\right)$ は誤り.

(6) $x^2 + 1 = t \cdots (*)$ とおくと

$(x^2+1)^4 = t^4$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

だから $dx = \dfrac{dt}{2x}$. これらを使って

$$\int (x^2+1)^4 x\,dx = \int t^4 x\,\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t^4\,dt = \frac{1}{10}t^5 = \frac{1}{10}(x^2+1)^5$$

(7) [やや高度] 授業スライド微分積分 B 第 7 回を見よ。

$x = \tan t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \cdots (*)$ とおくと

$1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ (教科書 P.31 を見よ。)

$(*)$ の両辺を t で微分すると

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ (教科書 P.308 を見よ。)

だから $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$. これらを使って

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int dt = t$$

x で表すと $\tan^{-1} x$ となる。

(8) [やや高度] 授業スライド第 7 回を見よ。

$x = \sin t \cdots (*)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと, この区間では $\cos t \geqq 0$ であるから三平方の定理により

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \text{より} \quad dx = \cos t \, dt$$

であるから

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int \cos^2 t \, dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt \\ &= \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right) = \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

ところで

$$\sin t = x,\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2},\ t = \sin^{-1} x$$

であるから

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x$$

6. (部分積分法)

$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ が連続の時,

$\displaystyle\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$

が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$ を計算しよう. $f'(x) = \sin x$, $g(x) = x$ と見ると,

$$f(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x,\ g'(x) = 1$$

だから,

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int x \left(-\cos x\right)' \, dx \\ &= x\left(-\cos x\right) - \int (x)' \left(-\cos x\right)\, dx \\ &= -x \cos x - \int \left(-\cos x\right)\, dx \\ &= -x \cos x + \sin x\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\,dx &= \int x(-e^{-x})'\,dx\\ &= x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})\,dx\\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -xe^{-x} - e^{-x}\end{aligned}$$

7. (定積分) (1) 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ と, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の関係を書け。

定理 6.11 をみよ。

(2) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくとき $F(x)$ と $f(x)$ の関係を書け.

微分積分学の基本定理である。

8. (定積分の置換積分法)

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

(定積分の置換積分法)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

$2x+1 = t \quad (*)$ とおく. この両辺を x で微分すると

$2 = \dfrac{dt}{dx}$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$dx = \dfrac{dt}{2} \qquad (**)$

という等式が得られる. $(*)$, $(**)$ によって積分変数を t に置き換えていくと

$\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ だから

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left(\frac{1}{3}\,9^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}\,1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{26}{3}.$$

別解

$$x=0 \Rightarrow t=1,\ x=4 \Rightarrow t=9 \cdots (***)$$

これと (*),(**) をあわせて

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \sqrt{t} \times \frac{dt}{2} \qquad = \left[\frac{1}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

でもよい

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(3x)\,dx$

$3x=t$ とおくと (1) と同様にして $dx=\dfrac{dt}{3}$ であるから

$$\int \sin 3x\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{3} = -\frac{1}{3}\cos t = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

だから

$$\int_0^{\pi} \sin 3x\,dx = \Big[-\frac{1}{3}\cos 3x\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\cos 3\pi - (-\frac{1}{3}\cos 0) = \frac{2}{3}.$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

だから部分積分法を使って

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin x)'\,dx = [x\,(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\,dx$$

$$= [x\,(\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

8. (広義積分) (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\log x\Big]_0^1 = \infty$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$

$-2x=t$ とおくと $dx=-\dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int e^{-2x}\,dx = \int e^t\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \left(-\frac{1}{2}e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = \frac{1}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$

広義積分の場合でも (もし積分が収束するならば) 部分積分法を使うことができる。

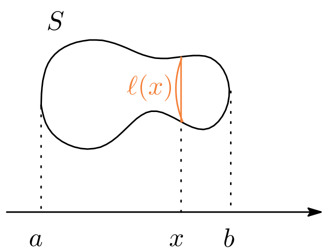
$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)' \times x\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \times x\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \times 1\,dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \times x\right]_0^{\infty} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \times x\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{0} \times 0\right) + \left(-\frac{1}{4}e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{4}e^{0}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{2x}} = 0, > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ を使った。教科書 112 ページを見よ。

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^{\infty} = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$

9. (面積・体積) (1)



図のような図形を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. このとき図形の面積 S を $\ell(x)$ で表せ.

第 5 回を復習してください。

(2) 関数 $y = x^2 - 2x$, $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ のグラフの概形をかき, 囲まれる部分の面積を計算せよ.

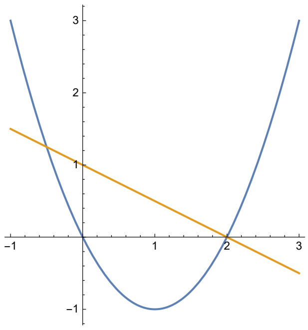
$y = x^2 - 2x$ は $x^2 - 2x = x(x-2)$ であるから $x = 0$ または $x = 2$ のとき $y = 0$ となるので x 軸との交点は $(0, 0)$ $(2, 0)$ である. また $y = (x-1)^2 - 1$ だから頂点が $(1, -1)$ の放物線である. 下に凸であるのは明らか.

$y=-\frac{1}{2}x+1$ は原点をとおり傾き $-\frac{1}{2}$ の直線である.

交点の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

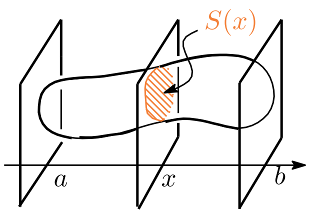
をといて $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ と $(2,0)$.



囲まれる部分は $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ の範囲にあり，この範囲では直線 $y=-\frac{1}{2}x+1$ が放物線 $y=x^2-2x$ の上方にある。

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}x+1\right)-(x^2-2x)\right\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left\{-x^2+\frac{3}{2}x+1\right\}dx=\frac{125}{48}$$ 訂正

(3)



図のような立体図形の体積を V, 点 $(x,0,0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とするとき V を $S(x)$ で表せ.

第 5 回を復習してください。

(4) $y=\sqrt{2x}$ のグラフ, $x=0$, $x=1$ と x 軸で囲まれる図形を x 軸の周りで 1 回転してできる図形の体積を求めよ.

第 6 回問題を参考にせよ。答えは π