

# 本日やること

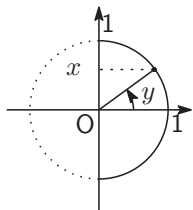
## ① 積分法

- 逆三角関数 (その 2)
- 二次無理関数の有理関数

# 積分法

## 逆三角関数 (その 2)

逆三角関数  $\sin^{-1}$  の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

であることを

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

でさだめる。

# 積分法

## 逆三角関数 (その 2)

逆三角関数  $\sin^{-1}$  の導関数

$a$  を正の定数とするとき

$$\frac{d}{dx} \left( \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

# 積分法

## 二次無理関数の有理関数の積分

二次無理関数の有理関数の積分

$R(X, Y)$  を  $X, Y$  の有理関数とすると、 $\int R(x, \sqrt{x \text{ の二次関数}}) dx$  は初等関数になる。

証明は省略する。重要な例を説明しよう。

# 積分法

## 二次無理関数の有理関数の積分

[例]  $a$  が正の定数のとき

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

を示す

$x = a \sin t$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$  とおくと, この区間では  $\cos t \geq 0$  であり

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = a \cos t \quad \text{より} \quad dx = a \cos t dt$$

であるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= a^2 \left( \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right) = a^2 \left( \frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

# 積分法

## 二次無理関数の有理関数の積分

ところで

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

であるから

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}.$$

# 積分法

## 二次無理関数の有理関数の積分

[例]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

を示す.

$x = \tan t$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$  とおくと, この区間では  $\cos t > 0$  であり

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{より} \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

であるから

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t} dt$$

# 積分法

## 二次無理関数の有理関数の積分

$s = \sin t$  とおくと  $ds = \cos t dt$  だから

$$= \int \frac{ds}{1-s^2} = -\frac{1}{2} \log |s-1| + \frac{1}{2} \log |s+1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right|$$

$\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  だから

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \right| = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$