

本日よりこと

① 積分法

- 三角関数の有理関数の積分法

積分法

復習：いろいろな初等関数の原始関数

初等関数の導関数は初等関数である。

初等関数の原始関数は初等関数とは限らない。

[原始関数が初等関数となる関数の例]

有理関数： $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ($P(x), Q(x)$ は x の多項式) \rightarrow 第 5 回でやった。

三角関数の有理関数： $\frac{1}{\sin x + \cos x + 1}$ など。 \rightarrow 本日やる。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

$R(X, Y)$: X, Y の有理関数 $\Rightarrow \int R(\cos x, \sin x) dx$ は初等関数になる。
なぜなら

三角関数の有理関数の積分法

$$\tan \frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi)$$

によって積分変数を x から t に変換すると

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{だから}$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

のように t の有理関数の積分に帰着されるからである。

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[確かめ] $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割って $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$
2倍角の公式により

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

また

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1 + t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

積分法

三角関数の有理関数の積分法

[例]

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \log |1+t| = \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right|\end{aligned}$$