

本日よりこと

① 積分法

- 不定積分の置換積分法

積分法

不定積分の置換積分法

[複雑な関数の積分法]

不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) (+C) \cdots (\star)$$

したがって

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} \right) = x^3 \text{ だから } \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

でも

$$\int (2x+3)^3 dx = \frac{(2x+3)^4}{4} \quad \text{は誤り}$$

積分法

不定積分の置換積分法

正しくは、 $2x + 3 = t$ とおくと合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2x + 3)^4}{4} \right) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^4}{4} \right) = 2 \cdot t^3 = 2 \cdot (2x + 3)^3$$

$$\text{だから } \int 2 \cdot (2x + 3)^3 dx = \frac{(2x + 3)^4}{4}$$

$$\text{だから } \int (2x + 3)^3 dx = \frac{(2x + 3)^4}{2 \cdot 4}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[一般化]

$$\int f(x) dx = F(x)$$

のとき x を $\varphi(x)$ でおきかえると $\varphi(x) = t$ において合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} (F(\varphi(x))) = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} F(t)$$

(*) より $\frac{d}{dt} F(t) = f(t)$ だから

$$= \varphi'(x) f(t) = \varphi'(x) f(\varphi(x))$$

だから

$$\int \varphi'(x) f(\varphi(x)) dx = F(\varphi(x)) = F(t) = \int f(t) dt$$

積分法

不定積分の置換積分法

まとめると

定理：不定積分の置換積分法

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数を持ち、 $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t))\psi'(t) dt.$$

(i), (ii) により x の関数の x による積分を t の関数の t による積分に置き換えること、(あるいはその逆) を **積分変数の変換** または **置換積分法** という。

(ii) は (i) で x を t に、 φ を ψ に置き換えたもの。

積分法

不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t = \varphi(x)$ または $x = \psi(t)$ となる変数 t を考え、
 $\varphi(x)$ を t で、または x を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t = \varphi(x)$ を x で微分して $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\varphi'(x)},$$

(ii) の場合 $x = \psi(t)$ を t で微分して $\frac{dx}{dt} = \psi'(t)$, 両辺に dt をかけて

$$dx = \psi'(t)dt,$$

(III) 以上により x, dx を t, dt でおきかえる。

このおきかえで $\int (t \text{ の関数}) dt$ の形になると、積分がうまくいく場合がある。

積分法

不定積分の置換積分法

[例 1] $\int (2x + 3)^3 dx$ を計算する。

$$2x + 3 = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit , \heartsuit で置き換えて

$$\int (2x + 3)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} = \frac{(2x + 3)^4}{8}$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 2] $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ を計算する。

$$x^2 + 1 = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{2x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{2x} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit , \heartsuit で置き換えて

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log t = \frac{1}{2} \log |x^2 + 1|$$

積分法

不定積分の置換積分法

[例 3] $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ を計算する。

$$\sin x = t \cdots \spadesuit$$

とおく。両辺 x で微分して

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{\cos x}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{\cos x} \cdots \heartsuit$$

\spadesuit, \heartsuit で置き換えて

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\cos x}{1 + t} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{1 + t} dt = \log |1 + t| = \log |1 + \sin x|$$