本日やること

1. 微分法
   - 高階導関数

2. 微分法の応用
   - 近似多項式

微分法
主な関数の高階導関数

べき関数の高階導関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\alpha},\ (\alpha\ \text{は実数の定数})\ \text{のとき} \\
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

例えば $f(x)=x^4$ のとき

$$f'(x)=4x^3,\quad f''(x)=4\cdot 3x^2,\quad f'''(x)=4\cdot 3\cdot 2x,\quad f^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$$

微分法

主な関数の高階導関数

指数関数・対数関数の高階導関数

$f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ だから $f^{(n)}(x) = e^x,\ (n = 1, 2, \cdots)$

$f(x) = \log x\ (x > 0)$ のとき

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f''(x) &= (-1)x^{-2} \\
f'''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}
\end{aligned}
$$

微分法

主な関数の高階導関数

三角関数の高階導関数

$$f(x)=\sin x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f(x)=\cos x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\sin x \text{ のとき}$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin t\quad \left(x+\frac{\pi}{2}=t \text{ とおいた}\right)$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\sin t=\frac{d}{dt}\sin t\frac{dt}{dx}=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\times 1=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

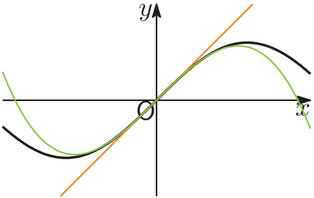
$$\vdots$$

これをくりかえす。$\cos x$ のときも同様。

微分法の応用

近似多項式

[例：$\sin x$ の近似多項式]



$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq 0$ (0 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ (1 次近似)

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x - \dfrac{x^3}{6}$ (3 次近似)

[目標]

関数 $y = f(x)$ を $x = 0$ の近くで x の多項式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2 \cdots \text{ は定数})$$

で近似したい。

そのため高階微分係数を利用する。

微分法の応用
近似多項式

準備：多項式の係数

x の n 次多項式

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

に対して

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ.

微分法の応用
近似多項式

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \\
P'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \\
P''(x) &= 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} \\
P'''(x) &= 3\cdot 2\cdot 1a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \\
&\vdots \\
P^{(n)}(x) &= n!a_n
\end{aligned}
$$

だから $x=0$ を代入すると

$$P(0)=a_0,\quad P'(0)=a_1,\quad P''(0)=2!a_2,\quad P'''(0)=3!a_3,\cdots\ P^{(n)}(0)=n!a_n$$

微分法の応用

近似多項式

Maclaurin 近似多項式

関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき、x の n 次多項式

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式という.

(A) は

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P''(0) = f''(0), \cdots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。
(B) により

$$x \fallingdotseq 0 \ \Rightarrow \ f(x) \fallingdotseq P(x) \quad \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Macraulin の定理

$f(x)$: 区間 (a, b) $(a < 0 < b)$ で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の n 次 Maclaurin 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

と表される. ここで θ $(0 < \theta < 1)$ は x と n で決まる適当な実数。

f が $n+1$ 回連続微分可能ならば $\lim_{x\to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^n} = 0$ となり $R_{n+1}(x)$ は非常に小さい誤差であるといえる。

微分法の応用

近似多項式

Maclaurin 近似多項式の例

$$e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x \fallingdotseq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

$$\cos x \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$\log(1+x) \fallingdotseq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$(-1 < x \leqq 1$ のとき$)$

微分法の応用

近似多項式

Taylor 近似多項式

関数 $f(x)$ が n 回微分可能とし、a を定義域内の点とするとき x の n 次多項式

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{2!}(x-a)^n \cdots (A)$$

を $f(x)$ の $x = a$ における n 次 Taylor 近似多項式という.

(A) は

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ P''(a) = f''(a), \cdots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad \cdots (B)$$

を満たすただ一つの n 次多項式である。

(B) により

$$x \fallingdotseq a \ \Rightarrow \ f(x) \fallingdotseq P(x) \quad \cdots (C)$$

であることが予想されるが、実際次が成り立つ。

微分法の応用

近似多項式

Taylor の定理

$f(x)$: a を含む開区間で $n+1$ 回微分可能,
$P(x)$: $f(x)$ の $x=a$ における n 次 Taylor 近似多項式,
とするとき, 近似の誤差を

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x), \quad a < x < b$$

で定めると,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表される. ここで θ $(0 < \theta < 1)$ は x と n で決まる適当な実数。