電気のための微分積分B 第6回問題 解答

3.1. (1) 半角の公式 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ により

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x}$

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

となるので

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2+10t+3}$$

ここで部分分数分解により

$$\frac{2}{3t^2+10t+3} = \frac{2}{3\,(t+3)\left(t+\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t+3} + \frac{1}{4}\frac{1}{t+\frac{1}{3}}$$

がわかるから

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+3} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t+\frac{1}{3}}{t+3}\right| = \frac{1}{4}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|$$